

**Correction : Exercice 1 ( 4.5 points)**

- 1) a) Le graphe (G) possède 4 sommets (A, B, C et D). Donc, l'ordre de (G) est 4.  
b) .

| Sommet | A | B | C | D |
|--------|---|---|---|---|
| $d^+$  | 2 | 1 | 1 | 2 |
| $d^-$  | 2 | 2 | 1 | 1 |

- c) (G) est un graphe connexe orienté .  $d^+ = d^-$ , pour tous les sommets sauf pour B et D :  
 $d^+(D) = d^-(D) + 1$  et  $d^-(B) = d^+(B) + 1$ . Donc le graphe (G) **admet une chaîne orientée eulérienne** (elle commencera en D et se terminera en B).  
d) On a :  $d^+(B) \neq d^-(B)$  .  
Donc, (G) **n'admet pas** de cycle orienté eulérien.

- 2) La matrice d'adjacence  $M$ . Dans l'ordre alphabétique (A, B, C, D) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3) a) Le nombre de chaînes orientées de longueur 2 sortant du sommet D : la 4<sup>ème</sup> ligne dans la matrice  $M^2$ . La 4<sup>ème</sup> ligne est : (1 0 1 1). La somme est  $1 + 0 + 1 + 1 = 3$ .  
Il y a donc **3 chaînes orientées de longueur 2 sortant du sommet D**.  
b) Puisque  $M^4 = M^2 \times M^2$ , on obtient ce coefficient en multipliant la 4<sup>ème</sup> ligne de  $M^2$  par la 1<sup>ère</sup> colonne de  $M^2$  :

$$m_{4,1}^{(4)} = (1 \ 0 \ 1 \ 1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 1) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 1) = 1 + 0 + 1 + 1 = 3$$

Il y a donc **3 chaînes orientées de longueur 4 allant de D à A**.

**Exemple d'une de ces chaînes :**

- $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$
- (Les deux autres étant :  $D \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$  et  $D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow A$ ).

## Correction : Exercice 2 ( 5 points)

1) a)  $\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(2) - 5(6) + 10 = -16.$

Puisque  $\det(A) = -16 \neq 0$ , la matrice  $A$  est **inversible**.

b)  $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8I_3.$

On sait que  $A \times B = 8I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{8}B\right) = I_3.$

On en déduit que :

$$A^{-1} = \frac{1}{8}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

2) a)  $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}.$  Donc  $(S)$  s'écrit sous la forme  $A \times X = C$ , où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

b) Puisque  $A$  est inversible, la solution est donnée par  $A \times X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$ . Comme  $A^{-1} = \frac{1}{8}B$ , on a :

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont donc :  $x = 1.5, y = 1$  et  $z = 3$ .

3) a) En observant le badge  $B_1$ , on compte le nombre de pièces de chaque type :

- Pièces noires (coût  $a$ ) : 2 pièces.
- Pièces blanches (coût  $b$ ) : 5 pièces.
- Pièce en damier (coût  $c$ ) : 1 pièce.

Le coût total du badge  $B_1$  est donc de  $2a + 5b + c$ . Or l'énoncé indique que le coût de  $B_1$  est de 11 dinars. On a donc l'équation :  $2a + 5b + c = 11$ .

b) Pour le **badge**  $B_2$  :

- Pièces noires ( $a$ ) : 4
- Pièces blanches ( $b$ ) : 3
- Pièces en damier ( $c$ ) : 1

L'énoncé indique que  $B_2$  coûte 12 dinars. Donc : **Coût**( $B_2$ ) =  $4a + 3b + c = 12$ .

Pour le **badge**  $B_3$  :

- Pièces noires ( $a$ ) : 2
- Pièces blanches ( $b$ ) : 4
- Pièces en damier ( $c$ ) : 2

L'énoncé indique que  $B_3$  coûte 13 dinars. Donc : **Coût**( $B_3$ ) =  $2a + 4b + 2c = 13$ .

c) **Coût du badge**  $B_4$  :

Les équations trouvées aux questions 3.a) et 3.b) forment exactement le système  $(S)$  de la question 2 :

$$(S) : \begin{cases} 2a + 5b + c = 11 \\ 4a + 3b + c = 12 \\ 2a + 4b + 2c = 13 \end{cases}$$

D'après la résolution précédente (avec  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ ), nous connaissons le coût unitaire de chaque pièce :  $a = 1.5$  dt,  $b = 1$  dt, et  $c = 3$  dt.

En observant le badge  $B_4$ , on compte : • 3 pièces noires • 3 pièces blanches • 2 pièces en damier

Le coût de  $B_4$  est donc :  $3a + 3b + 2c$ . Remplaçons par les valeurs trouvées :

$$\text{Coût}(B_4) = 3(1.5) + 3(1) + 2(3) = 4.5 + 3 + 6 = \mathbf{13.5} \text{ dinars}$$

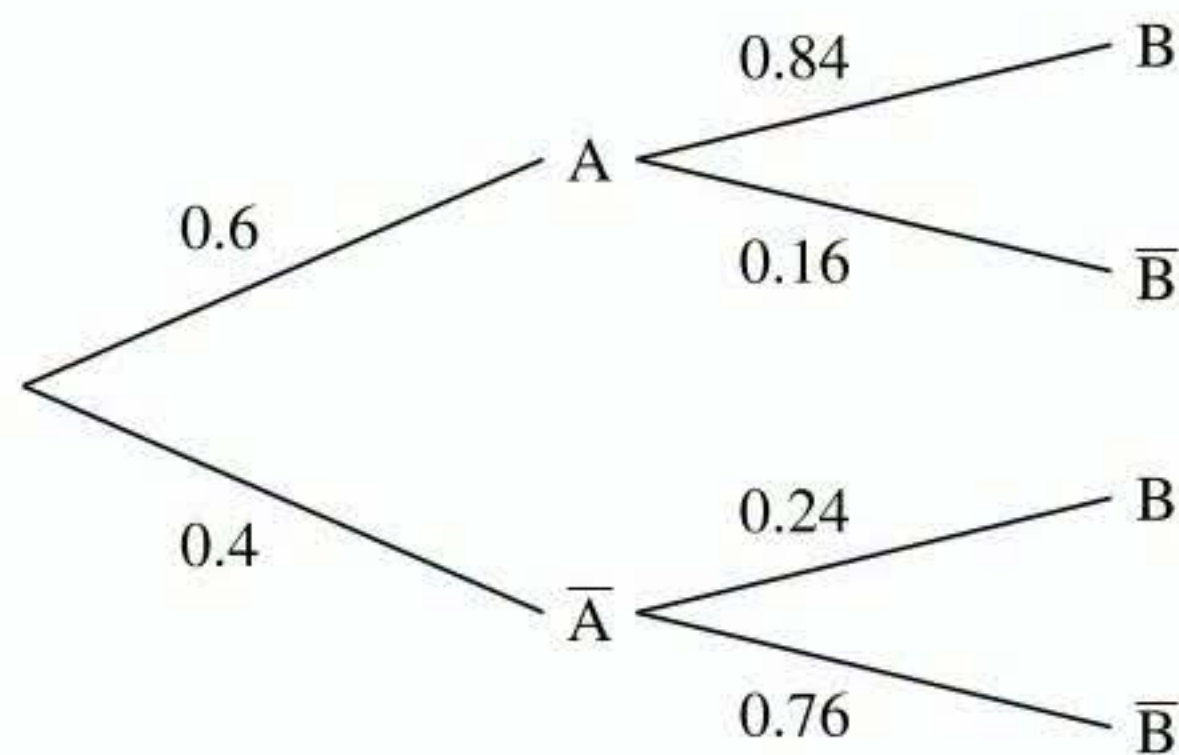
### Correction : Exercice 3 ( 4.5 points)

#### Partie I

1) a) On a  $p(A) = \frac{60}{100} = 0.6 \Leftrightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

b)  $p(B/A) = \frac{84}{100} = 0.84$

c) .



2) a) L'événement "l'appel choisi est professionnel **et** effectué avec la SIM1" correspond à  $A \cap B$  :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A) = 0.6 \times 0.84 = 0.504$$

b)

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A \cap B) + p(\bar{A}) \times p(B/\bar{A}) = 0.504 + (0.4 \times 0.24) = 0.6$$

#### Partie II

1) Pour chaque appel, le "succès" est "l'appel est professionnel" dont la probabilité est  $p(B) = 0.6$ .  
X compte le nombre d'appels professionnels parmi les 4.

X suit donc une **loi binomiale**  $\mathcal{B}(n, p)$  dont les paramètres sont :

- Le nombre d'épreuves :  $n = 4$  • La probabilité du succès :  $p = 0.6$

2)  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - C_4^0 \times (0.6)^0 \times (1 - 0.6)^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$

La probabilité qu'au moins un des 4 appels soit professionnel est donc de **0.9744**.

## Correction : Exercice 4 ( 6 points)

- 1) a) On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .  
On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{x} + \ln x = 1 - \infty - \infty = -\infty$$

**Interprétation graphique :** La droite d'équation  $x = 0$  (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe (C).

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} + \ln x = 1 - 0 + \infty = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 + 0 = 0$$

**Interprétation graphique :** La courbe (C) admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses  $(O, \vec{i})$ .

- 2) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$f'(x) = 0 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$$

Comme  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 > 0$  et  $x^2 > 0$ .

Par quotient de nombres strictement positifs, on a donc  $f'(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

- b) La dérivée étant strictement positive, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

- 3) a)  $f(1) = 1 - \frac{1}{1} + \ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0 = y_I$ . Ainsi,  $I(1, 0)$  est un point de la courbe (C).

- b) La courbe (C) ( Voir le graphique ) :

- 4) Soit  $F(x) = (x-1)\ln x$ .  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme produit de deux fonctions dérivables.

$$F'(x) = 1 \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \ln x = f(x)$$

Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = f(x)$ , donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

- 5) a) Sur l'intervalle  $[1, e]$ ,  $f$  est croissante et  $f(1) = 0$ , donc  $f(x) \geq 0$ .

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = \left[F(x)\right]_1^e = F(e) - F(1) = (e-1)\ln(e) - (1-1)\ln(1) = e-1$$

- b)

$$\bar{f} = \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e-1} \times \mathcal{A} = \frac{1}{e-1} \times (e-1) = 1$$

