

Exercice 1 (5 points)

1) a) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = 6$ et $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{6} = 13$ Les coordonnées du point moyen sont $G(6, 13)$.

b) Le nuage de points est tracé sur le graphique de l'annexe ci-dessous.

c) On constate que les points forment un nuage de forme allongée : lorsque le nombre de guichets (x_i) augmente, la durée d'attente (y_i) diminue.

Cette forme allongée et cette tendance linéaire justifient la recherche d'un ajustement affine.

2) $r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \approx -0.9942$ Arrondi au centième, $r \approx -0.99$ $|r| > 0.99$.

Interprétation : Cela indique une très forte corrélation linéaire entre le nombre de guichets ouverts et la durée d'attente. Un ajustement affine est donc très pertinent.

3) a) L'équation de la droite de régression (D) de y en x est de la forme $y = ax + b$, avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)} \approx -2.028 \approx -2.0 \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} = 25.0$$

L'équation de la droite de régression est (D) : $y = -2.0x + 25.0$.

b) La droite (D) passe par le point moyen $G(6, 13)$. Prenons $x = 3$: $y = -2.0(3) + 25.0 = -6 + 25 = 19$.
La droite passe par $(3, 19)$.

c) La société dispose de 12 guichets. Pour $x = 12$.

$$y = -2.0(12) + 25.0 = -24 + 25 = 1.0$$

L'estimation de la durée moyenne d'attente pour 12 guichets est de **1 minute**.



Exercice 2 (5 points)

1) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Puisque $A \times B = I_3$, la matrice B est la matrice inverse de A.

2) a) on a : $(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 29 \\ 58 \end{pmatrix}}_Y$

Le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle $A \times X = Y$

b) L'écriture matricielle est $AX = Y$. Puisque A est inversible et que sa matrice inverse est B :

$$B \times (AX) = B \times Y \Leftrightarrow X = BY = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 29 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution du système (S) est le triplet $(a, b, c) = (5, 4, 1)$.

3) a) En utilisant les données du tableau, nous pouvons écrire des équations :

- Pour $x = 1$, $C(1) = 110 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + 100 = 110 \Rightarrow a + b + c = 10$.
- Pour $x = 2$, $C(2) = 158 \Rightarrow a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + 100 = 158 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 58$. En divisant par 2, on obtient $4a + 2b + c = 29$.
- Pour $x = 3$, $C(3) = 274 \Rightarrow a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + 100 = 274 \Rightarrow 27a + 9b + 3c = 174$. En divisant par 3, on obtient $9a + 3b + c = 58$.

Les trois équations obtenues sont exactement les équations du système (S). Par conséquent, le triplet (a, b, c) qui modélise la fonction de coût est la solution de (S).

b) D'après la question 2.b), la solution unique du système (S) est $(a, b, c) = (5, 4, 1)$. En remplaçant ces valeurs dans l'expression de $C(x)$, on obtient :

$$C(x) = 5x^3 + 4x^2 + 1x + 100$$

4) a) La production est de 40 millions de bouteilles. Dans notre modèle, x est en dizaines de millions, donc $x = 40/10 = 4$:

$$C(4) = 5(4)^3 + 4(4)^2 + (4) + 100$$

$$C(4) = 5(64) + 4(16) + 4 + 100 = 320 + 64 + 4 + 100 = 488$$

Le coût total de production pour 40 millions de bouteilles est de **488 millions de dinars**.

b) Le bénéfice total est la recette totale moins le coût total.

$$\text{Bénéfice} = \text{Recette} - \text{Coût}$$

Le bénéfice est de 12 millions de dinars et le coût est de 488 millions de dinars.

$$12 = \text{Recette} - 488 \Rightarrow \text{Recette} = 488 + 12 = 500 \text{ millions de dinars}$$

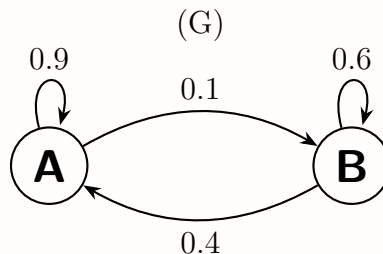
Cette recette provient de la vente de 40 millions de bouteilles.

$$\text{Prix de vente d'une bouteille} = \frac{\text{Recette totale}}{\text{Nombre de bouteilles}} = \frac{500 \times 10^6 \text{ dinars}}{40 \times 10^6 \text{ bouteilles}} = \frac{500}{40} = 12.5$$

Le prix de vente d'une bouteille d'huile d'olive était de **12.5 dinars**.

Exercice 3 (5 points)

1) a) .



b) $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$

2) a) À l'année initiale (2010), on a $n = 0$. On sait que 10% des élèves sont en école privée, donc $b_0 = P(B_0) = 0.1$. La proportion d'élèves en école étatique est $a_0 = P(A_0) = 1 - b_0 = 1 - 0.1 = 0.9$.

L'état initial est $P_0 = (a_0 \ b_0) = (0.9 \ 0.1).$

b) L'année 2013 correspond à $n = 2013 - 2010 = 3$. $P_3 = P_0 \times M^3$. Pour $n = 3$:

$$M^3 = \begin{pmatrix} \frac{33}{40} & \frac{7}{40} \\ \frac{28}{40} & \frac{12}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.825 & 0.175 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_0 \times M^3 = (0.9 \ 0.1) \times \begin{pmatrix} 0.825 & 0.175 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.7425 + 0.07 \quad 0.1575 + 0.03) = (0.8125 \ 0.1875)$$

En 2013, la probabilité d'être dans une école étatique est $a_3 = 0.8125$ (81.25%) et dans une école privée est $b_3 = 0.1875$ (18.75%).

c) On a : $p \times M = \left(\frac{4}{5} \ \frac{1}{5}\right) \times \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \left(\frac{40}{50} \ \frac{10}{50}\right) = \left(\frac{4}{5} \ \frac{1}{5}\right) = p$, $p = \left(\frac{4}{5} \ \frac{1}{5}\right)$ est l'état stable.

Exercice 4 (5 points)

1) a) $f(-1) = -1$, $f(1) = \frac{4}{e} - 1$, $f(\alpha) = 0$ et $f'(-1) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2) a) On sait que $E(\alpha, 0)$ est un point de la courbe (C), ce qui signifie que $f(\alpha) = 0$. On a : $f(\alpha) = (\alpha + 1)^2 e^{-\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 e^{-\alpha} = 1$ Comme E est sur la courbe, $\alpha \neq -1$, donc $(\alpha + 1)^2 \neq 0$, d'où $e^{-\alpha} = \frac{1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$

b) F est dérivable sur $\mathbb{R}$. $F'(x) = (-2x - 4)e^{-x} + (-x^2 - 4x - 5)(-e^{-x}) - 1 = (-2x - 4)e^{-x} + (x^2 + 4x + 5)e^{-x} - 1 = (x + 1)^2 e^{-x} - 1 = f(x)$. Donc F est une primitive de f.

c) $\mathcal{A} = \int_0^\alpha |f(x)| dx$ D'après le graphe, sur l'intervalle $[0, \alpha]$, la courbe (C) se trouve en-dessus de l'axe des abscisses, ce qui signifie que $f(x) \geq 0$ sur cet intervalle. Donc $|f(x)| = f(x)$.

$$\mathcal{A} = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = F(\alpha) - F(0) = ((-\alpha^2 - 4\alpha - 5)e^{-\alpha} - \alpha) + 5.$$

$$\text{or : } e^{-\alpha} = \frac{1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}, \text{ donc. } \mathcal{A} = -(\alpha^2 + 4\alpha + 5) \left(\frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \right) - \alpha + 5$$

$$\mathcal{A} = \frac{5(\alpha^2 + 2\alpha + 1) - \alpha^2 - 4\alpha - 5 - \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1)}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{5\alpha^2 + 10\alpha + 5 - \alpha^2 - 4\alpha - 5 - \alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{5\alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \text{ (u.a.)}$$