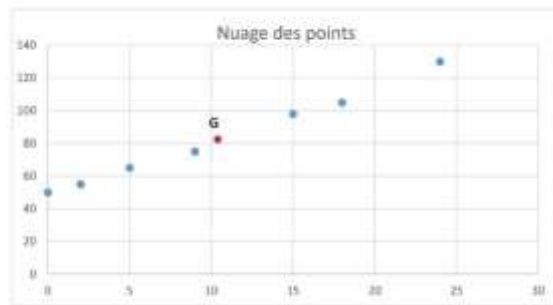


MATHÉMATIQUES
Section : Economie et Gestion
Session de contrôle 2021

Exercice N°1 :

1) a)



b) Le nuage permet d'envisager un ajustement affine car les points sont allongés autour d'une droite.

c) On a : $\bar{X} = \frac{1}{7} \sum x_i \cong 10,4$; $\bar{Y} = \frac{1}{7} \sum y_i \cong 82,6$. Par suite $G(10,4 ; 82,6)$

2) a) $r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \cong 0,998$

b) $a = \frac{\text{Cov}(T,Y)}{V(T)} = 3,298$; $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 48,176$. D: $y = 3,298 x + 48,176$

3) Pour l'année 2022, on a : $x = 27$

Donc le prix du m^2 en dinars est $y = 3,298 \times 27 + 48,176 = 137,222$

Le prix de vente à un dinars près de $50 m^2$ de tissus est $137,222 \times 50 = 6861$ DT

Exercice N°2 :

1) a) L'ordre du graphe (T) est égal à 7.

b) Le graphe (T) n'est pas complet car les deux sommets A et B ne sont pas adjacents

2) a)

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	4	2	3	3	4	2	4

- b) Puisque les degrés des sommets du graphe (T) ne sont pas tous pairs, alors le graphe (T) n'est pas un cycle eulérien .
- c) Puisque le graphe (T) admet exactement deux sommets de degré impairs qui sont C et D, alors (T) admet une chaîne eulérienne .

Exemple : $C \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$.

- 3) a) Notons $\gamma(T)$ le nombre chromatique du graphe (T) . On a :

D'une part le plus grand degré de tous les sommets est 4, alors

$$\gamma(T) \leq 4 + 1 \Leftrightarrow \gamma(T) \leq 5$$

D'autre part l'ordre du plus grand sous graphe complet est 3 alors $\gamma(T) \geq 3$

Par suite $3 \leq \gamma(T) \leq 5$

- b) On utilise l'algorithme de Welsh et Powel

Sommet	A	E	G	C	D	B	F
Degré	4	4	4	3	3	2	2
Couleurs	C_1	C_2	C_3	C_2	C_3	C_1	C_1

Par suite $\gamma(T) = 3$.

4) a)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Le nombre de chemins de longueur 3 reliant les sommets B et E est le terme situé à l'intersection de deuxième ligne et la colonne 5 (a_{25}) de la matrice M^3 .
Donc il y a 4 chemins de longueur 3 reliant les sommets B et E qui sont :

$B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$, $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow E$, $B \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow E$, et $B \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E$

Exercice N°3 :

I) $Q = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 20 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

1) $Q \times P = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 20 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \times 5 + 30 \times 2,5 + 10 \times 4 \\ 20 \times 5 + 10 \times 2,5 + 40 \times 4 \\ 30 \times 5 + 20 \times 2,5 + 30 \times 4 \end{pmatrix}$

$$\text{Par suite } Q \times P = \begin{pmatrix} 215 \\ 285 \\ 320 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } \det(A) &= \begin{vmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 20 \times \begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 20 \times \begin{vmatrix} 15 & 8 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} + 15 \times \begin{vmatrix} 15 & 8 \\ 5 & 32 \end{vmatrix} \\ &= 1800 \neq 0, \text{ donc la matrice } A \text{ est inversible} \end{aligned}$$

$$b) \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 1800 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } A \times \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix} = 1800 I_3$$

$$\text{Donc la matrice inverse de } A \text{ est : } A^{-1} = \frac{1}{1800} \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix}$$

II) 1) On a :

- Le coût mensuel de M_1 est $(20 + 20 + 30) \times 5 = 350$ milles dinars
- Le coût mensuel de M_2 est $(30 + 10 + 20) \times 2,5 = 150$ milles dinars
- Le coût mensuel de M_3 est $(10 + 40 + 30) \times 4 = 320$ milles dinars

Par suite le coût mensuel total est égal à $(350+150+320) = 820$ milles dinars

$$2) \text{ a) } (S): \begin{cases} \frac{20 \times 5x}{100} + \frac{30 \times 25y}{100} + \frac{10 \times 4z}{100} = 6 \\ \frac{20 \times 5x}{100} + \frac{10 \times 25y}{100} + \frac{40 \times 4z}{100} = 7 \\ \frac{30 \times 5x}{100} + \frac{20 \times 25y}{100} + \frac{30 \times 4z}{100} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} 20x + 15y + 8z = 120 \\ 20x + 5y + 32z = 140 \\ 15x + 5y + 12z = 80 \end{cases}$$

$$b) (S) \Leftrightarrow A \times X = B, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{1800} \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Conclusion : Le prix de de M_1 augmente de 2%, le prix de de M_2 augmente de 4% et le prix de de M_3 augmente de 2,5%.

3) Le coût mensuel de M_1 après hausse est $350 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 357$ milles dinars

Le coût mensuel de M_2 est $150 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 156$ milles dinars

Le coût mensuel de M_3 est $320 \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = 328$ milles dinars

Exercice N°4 :

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

b)

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
Position relative de (Γ) et (Δ)	(Γ) est au dessous (Δ)	(Γ) est au dessus de (Δ)	(Γ) est au dessous de (Δ)	

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4\ln(x+1) - (x+1)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(4 \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} - 1 \right) = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

b) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$;

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - 1 = \frac{4-(x+1)}{x+1} = \frac{3-x}{x+1}$$

c)

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
f	-1	$4\ln 4 - 4$	$-\infty$

3) Pour tout $x \geq 0$; $f(x) = 4\ln(x+1) - (x+1) = g(x) - h(x)$

4) Soit x le nombre d'appareils fabriqués en une journée, $g(x)$ la recette journalière et $h(x)$ le cout de fabrication journalier

a) Le bénéfice est maximal pour $x = 3$, donc l'usine doit fabriquer exactement 3 appareils par jour pour assurer un bénéfice maximal, ce bénéfice est

$$f(3) \times 1000 \text{ dinars} = 1545 \text{ dinars} .$$

b) Pour $x = 7$, on a $f(7) > 0$, donc c'est rentable de fabriquer 7 appareils par jour.

c) L'usine devient perdante pour $f(x) < 0$ et $x \geq 1$, c'est-à-dire $g(x) < h(x)$ et $x \geq 1$

Donc la courbe (Γ) est dessus de la droite (Δ) , c'est-à-dire $x \geq 8$.

A partir de 8 appareils fabriqués par jour, l'usine devient perdante.