

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session principale
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences Techniques
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--	--



Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (4,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

$$A(-1, -1, -1), B(-2, -1, 0), C(1, 1, -5) \text{ et le vecteur } \vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) a) Vérifier que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -2\vec{N}$. En déduire que A , B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan passant par A , B et C .

Montrer qu'une équation de P est $x + y + z + 3 = 0$.

c) On considère les points $E(1, 0, 2)$ et $H(-1, -2, 0)$.

Vérifier que $\vec{HE} = 2\vec{N}$. En déduire que H est le projeté orthogonal de E sur le plan P .

d) Calculer le volume du tétraèdre $EABC$.

2) On considère dans l'espace, l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 9 = 0.$$

a) Montrer que S est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$.

b) Montrer que P coupe S suivant le cercle (ζ_1) du plan P de centre H et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Vérifier que A et B appartiennent à (ζ_1) .

3) On considère le plan $Q : x - 5y + z - 3 = 0$.

a) Montrer que P et Q sont sécants suivant la droite (AB) .

b) Vérifier que $E \in Q$.

c) En déduire que le plan Q coupe la sphère S suivant un cercle (ζ_2) dont on précisera le centre et le rayon.

d) Montrer que (ζ_1) et (ζ_2) se coupent en A et B .

Exercice 2 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1)
 - a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$.
 - c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.
- 3) On pose pour tout entier naturel n , $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$.
 - a) Vérifier que $S_1 = \ln 3$.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel n , $S_n = \ln(n+2)$.
 - c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 10$.

Exercice 3 : (4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points F , G et I d'affixes respectives :

$$z_F = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i, \quad z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z_I = -\frac{1}{2} + i.$$

- 1)
 - a) Vérifier que $z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
 - b) Montrer que F et G appartiennent au cercle (ζ) de centre I et de rayon 1.
 - c) Vérifier que $z_F - z_I = i(z_G - z_I)$. En déduire que le triangle IFG est rectangle en I .
- 2) Dans la figure 1 de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) .
Construire les points F et G .
- 3)
 - a) Vérifier que $(2 + 2\sqrt{3})i$ est une racine carrée de $-16 - 8\sqrt{3}$.
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3z + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3} = 0$.
- 4) Soient K et L les points d'affixes respectives : $z_K = -\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$.
 - a) Montrer que $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$. En déduire que $(FK) \perp (FI)$.
 - b) Construire K et L .
 - c) Vérifier que $z_G - z_L = (2 + \sqrt{3})(z_F - z_I)$. En déduire que $(GL) \parallel (FI)$.
 - d) Les droites (FK) et (GL) se coupent en un point D .

Montrer que le cercle (ζ) est inscrit dans le triangle DKL .

 Exercice 4 : (7 points)

- 1) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

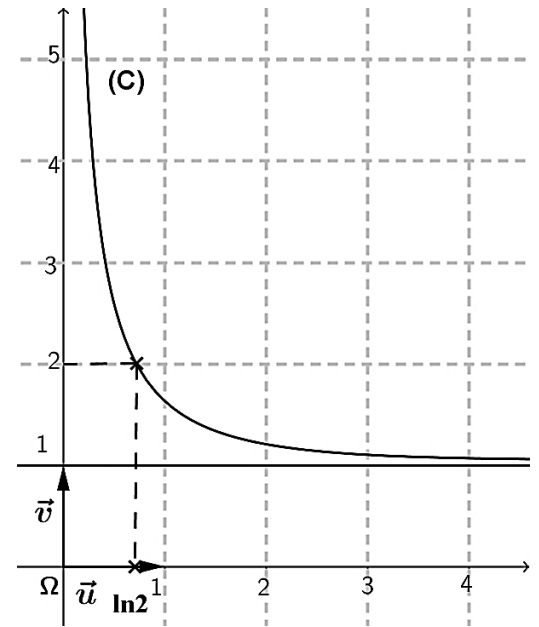
On donne ci-contre la courbe représentative (C) de g dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

En utilisant le graphique :

- a) Déterminer $g(\ln 2)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

- b) Justifier que pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$g'(x) < 0 \text{ et } g(x) > 1.$$



- 2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b) Vérifier que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

- c) Dresser le tableau de variation de f .

- d) Vérifier que $f(\ln 2) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

- 3) a) Montrer que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $\ln(g(x)) = x - f(x)$.

- b) En déduire que $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$.

- c) Montrer que (Γ) est au-dessous de Δ .

- 4) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

- a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique notée α .

- 5) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé la droite Δ et on a placé le point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$.

Tracer la courbe (Γ) .

- 6) a) Vérifier que $\frac{e^{2x}}{e^x - 1} = e^x + \frac{e^x}{e^x - 1}$. En déduire que $\int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = e^{\alpha} + f(\alpha) - 2$.

- b) Soit $I = \int_{\ln 2}^{\alpha} e^x \ln(e^x - 1) dx$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = e^{\alpha} f(\alpha) - \int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$.

- c) En déduire que $I = 2$.



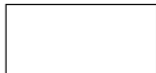
Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

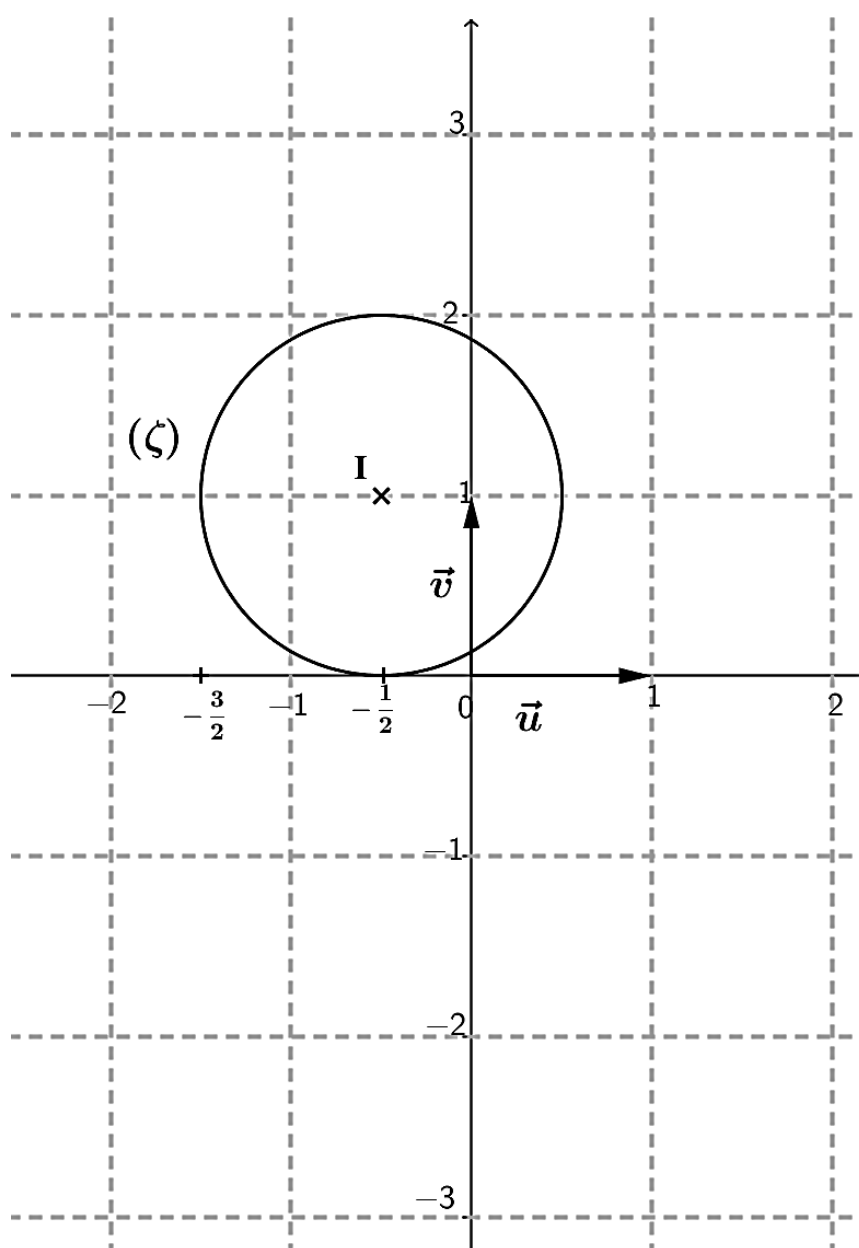
Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2022)
Annexe à rendre avec la copie

figure 1 :



Ne rien écrire ici

figure 2 :

