

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

**SESSION
PRINCIPALE**

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
EPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$ est
- a) croissante sur $]0, +\infty[$ b) décroissante sur $]0, +\infty[$ c) n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ est égale à :

- a) 0 b) 2 c) 1

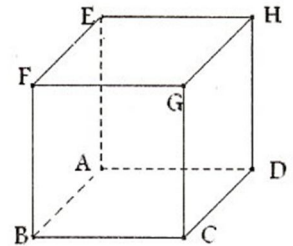
- 3) La figure ci-contre est celle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

- i) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ est égal à :

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$

- ii) $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ est égal à :

- a) $\overline{AE}$ b) $\overline{EA}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AE}$



Exercice 2 (6 points)

- 1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- a) Calculer u_1 et u_2 .
- b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

- 2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c) Calculer la limite de la suite (u_n) .
- 3) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 - v_n$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$.
- c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

- 1) Montrer que $ie^{\frac{\pi}{6}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^2$.
- 2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
- $$(E): z^2 - 2(e^{\frac{i\pi}{12}})z + (1-i)e^{\frac{i\pi}{6}} = 0.$$
- 3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $e^{\frac{\pi}{3}}$, $e^{\frac{\pi}{12}}$ et $e^{\frac{\pi}{3}} + e^{\frac{\pi}{12}}$.

- a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.
- b) Placer les points les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- c) Calculer l'aire du losange $OACB$.

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -x e^{-x}$.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les axes du repère et la droite D d'équation $x = n$.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n .
- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n$.