

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session de contrôle
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences Techniques
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--



Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1, 2, 1)$, $B(1, 0, -1)$ et $C(3, 2, 1)$.

1) a) Déterminer $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan passant par A , B et C .

Montrer qu'une équation de P est $y - z - 1 = 0$.

2) a) Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A .

b) Soit I le milieu du segment $[BC]$. Vérifier que $I(2, 1, 0)$.

3) On considère dans l'espace l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2 = 0.$$

a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

b) Soit (ζ) le cercle du plan P de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

Montrer que P coupe S suivant (ζ) .

c) Montrer que le cercle (ζ) est circonscrit au triangle ABC .

4) On considère la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = -\alpha + 1 \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire à P en I .

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $M_\alpha(2, 1 - \alpha, \alpha)$ un point de Δ . Montrer que $d(M_\alpha, P) = \sqrt{2}|\alpha|$.

c) Pour $\alpha \neq 0$, on note V_α le volume du tétraèdre $ABCM_\alpha$.

Montrer que $V_\alpha = \frac{4}{3}|\alpha|$.

d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $V_\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

e) Montrer que, pour les valeurs de α trouvées dans la question précédente, $M_\alpha \in S$.

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) a) Vérifier que $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = 8 + 8i\sqrt{3}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 - 2i\sqrt{3} = 0$.
- 2) On considère les points $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ d'affixes respectives :
 $z_E = 1$; $z_F = \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_G = -\sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$.
a) Vérifier que $z_G - 1 = i(z_F - 1)$.
b) En déduire que le triangle $\mathbf{EFG}$ est rectangle et isocèle en $\mathbf{E}$.
c) Déterminer l'affixe du point $\mathbf{H}$ milieu du segment $[\mathbf{FG}]$.
d) Justifier que la droite $(\mathbf{EH})$ est la médiatrice du segment $[\mathbf{FG}]$.
- 3) a) Montrer que le point $\mathbf{H}$ appartient au cercle (ζ) de centre $\mathbf{E}$ et de rayon 2 .
b) Dans la figure 1 de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) . Construire le point $\mathbf{H}$.
- 4) Soit (ζ') le cercle de centre $\mathbf{H}$ et de rayon 2 .
a) Montrer que (ζ') est le cercle circonscrit au triangle $\mathbf{EFG}$.
b) Construire les points $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{3u_n^2 + 4}}{2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{4 - u_n^2}{4}$.
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 4$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
b) Exprimer v_n en fonction de n .
c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{4 - \frac{7}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = -7 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 4 : (6,5 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$.

On donne le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

a) Donner le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer $g(1)$. En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$, on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique notée α .

e) Vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ .

4) a) Soit T la tangente à (C) au point $A(e, f(e))$.

Donner une équation de T et vérifier que $T // \Delta$.

b) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) - (x + \frac{2}{e}) = \frac{2}{xe}(e \ln x - x)$.

c) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e \ln x - x$.

Etudier le sens de variation de h et calculer $h(e)$.

d) Déduire que (C) est au-dessous de T .

5) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé la droite Δ et on a placé le point A .

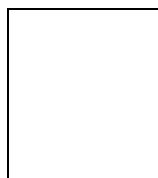
Tracer T et (C) .

6) Pour λ un réel strictement positif, on note $I(\lambda)$ l'aire du domaine D_λ du plan limité par la courbe (C) , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que pour tout λ strictement positif, $I(\lambda) = (\ln \lambda)^2$.

b) Montrer que pour tout λ strictement positif, $I(\lambda) = I(\frac{1}{\lambda})$.

c) Pour quelles valeurs de λ l'aire du domaine D_λ est égale à 2 ?



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

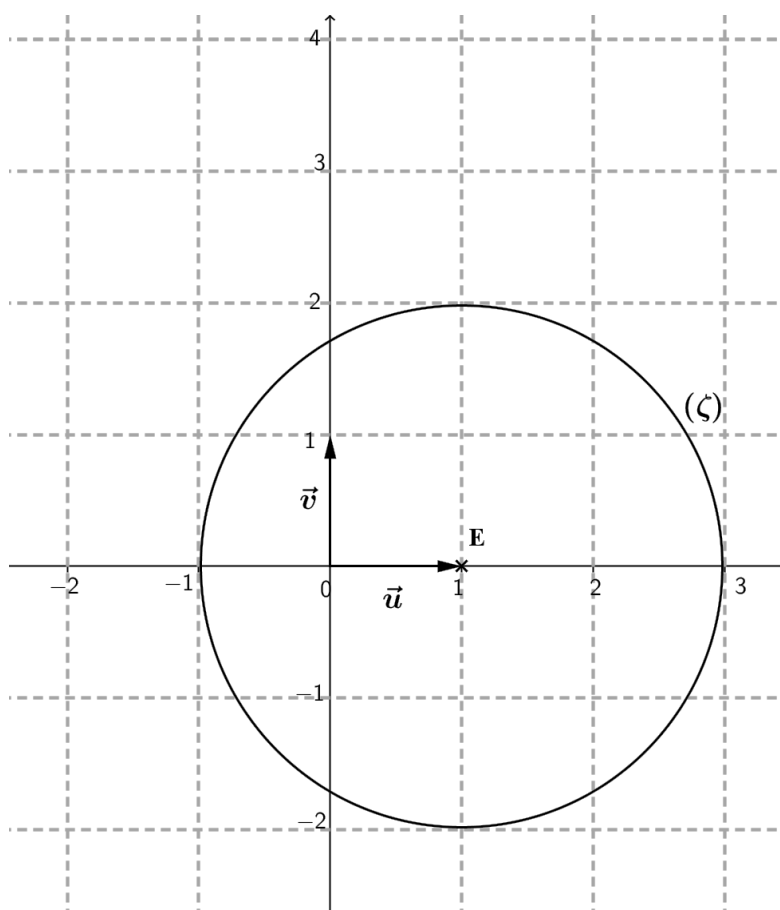
.....

.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2022)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1 :



Ne rien écrire ici

Figure 2 :

