

2) Soient $\theta \in]0, \pi[$ et M et N les points d'affixes respectives $z_M = 1 + 2e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + 2e^{-i\theta}$.

a) Vérifier que $z_N = \overline{z_M}$. En déduire que le triangle BMN est isocèle en B.

b) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [MN].

c) Soit S l'aire du triangle BMN. Montrer que $S = 4(1 + \cos\theta)\sin\theta$.

3) Soit h la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $h(x) = (1 + \cos x) \sin x$.

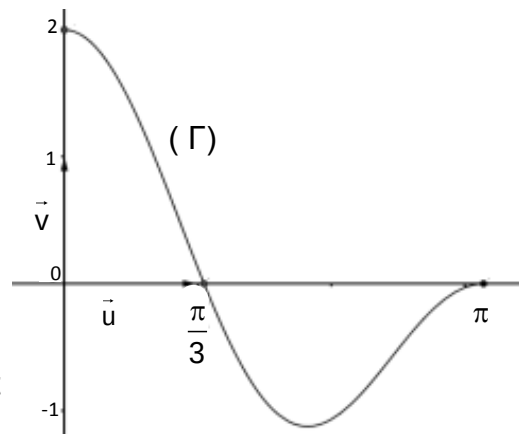
La courbe (Γ) ci-contre est la représentation graphique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de la fonction dérivée h' de h.

• (Γ) coupe la droite $(O, \vec{u})$ aux points d'abscisses respectives

$\frac{\pi}{3}$ et π .

a) A l'aide du graphique, justifier que le maximum de h est atteint en $\frac{\pi}{3}$.

b) En déduire que l'aire du triangle BMN est maximale si et seulement si $M = C$ et $N = D$.



Exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-1, -1, 3)$, $B(0, -3, 1)$ et $C(-3, 0, 1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

c) Vérifier qu'une équation cartésienne de P est : $2x + 2y - z + 7 = 0$.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre le point I(3, -1, 2) et de rayon 5.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle (ζ) de centre le point H(1, -3, 3) et de rayon 4.

3) Soit Q le plan d'équation : $x - 2y - 2z + 11 = 0$.

a) Montrer que Q est perpendiculaire à P.

b) Soit Δ la droite d'intersection de P et Q.

Vérifier qu'une représentation paramétrique de Δ est :
$$\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

c) Calculer la distance du point H à la droite Δ .

d) En déduire que dans le plan P, la droite Δ est la tangente au cercle (ζ) au point $J(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{17}{3})$.

Exercice 4 (7 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 1$.

1) a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que pour tout réel x , $g(x) > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+1)e^{-x} + e^{-2x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

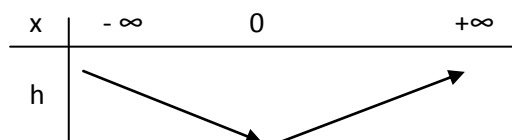
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -2e^{-2x}g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) a) Vérifier qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = -2x + 3$.

b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + 2x - 3$ et on donne ci-dessous le sens de variations de h .



Calculer $h(0)$ et en déduire la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T) .

5) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C) .

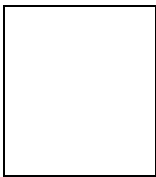
6) Soit n un entier naturel non nul. On pose $U_n = \int_0^n f(t) dt$.

a) Interpréter géométriquement U_n .

b) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - f'(x)$.

c) Montrer que $U_n = \frac{9}{2} - 2e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-2n} - f(n)$.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure

