

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2013	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : Sciences Techniques	SESSION DE CONTRÔLE

Le sujet comporte 03 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, -2)$, $C(0, 1, -2)$ et le plan $(P) : x + y - z - 3 = 0$.

- 1) Vérifier que A, B et C appartiennent au plan (P).
- 2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$
 - a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
 - b) Montrer que (P) et (S) se coupent suivant le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
 - c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
- 3) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan (P).
 - a) Montrer qu'un système paramétrique de Δ est :
$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$
 - b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G du plan (P) et la droite Δ .
 - c) Vérifier que G est le centre de gravité du triangle ABC.
 - d) En déduire le centre et le rayon du cercle (C).

Exercice 2 (4 points)

- 1) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
 - a) Montrer que : pour tout $x \geq 1$; $f(x) \leq x$ et que pour tout $0 \leq x \leq 1$; $f(x) \geq x$.
 - b) Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
- 2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 \leq u_n \leq 1$.
 - b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 (5 points)

Les résultats du baccalauréat, dans un établissement public donné, sont :

- 60% des candidats sont admis.
- Parmi les candidats admis, 80% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.
- Parmi les candidats non admis, 70% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.

On interroge, au hasard, un candidat au baccalauréat de cet établissement et on désigne A et M les événements suivants :

A « le candidat interrogé est admis au baccalauréat ».

M « la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 ».

- 1) a) Déterminer $p(\bar{A})$, $p(M/A)$ et $p(M/\bar{A})$.
b) Justifier que $p(\bar{M}/A) = \frac{1}{5}$.
- 2) Construire l'arbre pondéré décrivant cette situation.
- 3) a) Calculer la probabilité qu'un candidat interrogé soit admis et que sa moyenne annuelle soit inférieure à 10 sur 20.
b) Montrer que $p(M) = 0.76$.
c) Calculer la probabilité qu'un candidat interrogé soit admis sachant qu'il a obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10.
- 4) On sait que le nombre de candidats de cet établissement est égal à 200.

Donner une estimation du nombre de candidats admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10.

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Déterminer la nature de la branche infinie de (C).
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = -4x \ln(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe $(O, \vec{i})$.

5) Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On précisera en particulier la tangente à (C) au point O.

6) Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda < \sqrt{e}$.

a) En utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 \ln(x) dx = \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e}$

b) Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \sqrt{e}$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.

c) Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$.