

Exercice 1 (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que $(2 - 2i\sqrt{3})^2 = -8 - 8i\sqrt{3}$.

b) Résoudre alors l'équation (E) .

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points H, A, B et C d'affixes respectives $z_H = 2i$, $z_A = 1 + i(2 - \sqrt{3})$, $z_B = -1 + i(2 + \sqrt{3})$ et $z_C = \sqrt{3} + 3i$.

Dans la **figure 1** de l'annexe, on a placé le point H et on a tracé les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = 3$ et $x = 1$.

a) Justifier que C appartient à Δ .

b) Montrer que $\arg(z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Construire alors le point C .

3) a) Vérifier que H est le milieu du segment $[AB]$.

b) Montrer que $z_C - z_H = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $z_A - z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c) En déduire que la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (HC) en H .

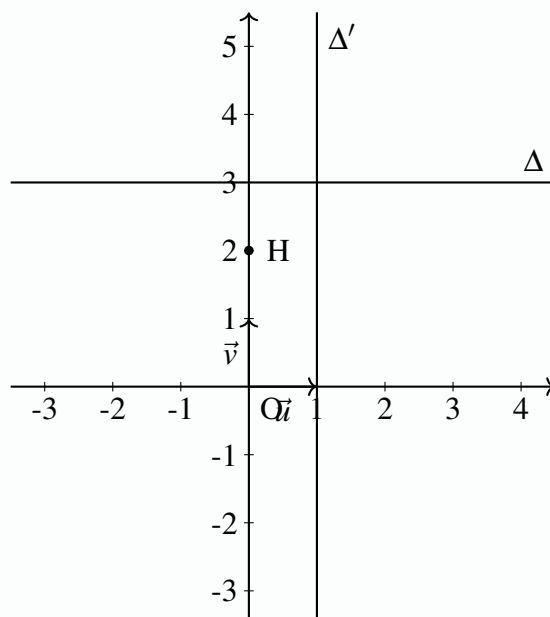
d) Justifier que A appartient à Δ' puis construire les points A et B .

4) a) Vérifier que $OH = \frac{AB}{2}$. En déduire que le triangle OAB est rectangle en O .

b) Montrer que $z_A z_B = -2 + 2i\sqrt{3}$.

c) Montrer alors que l'aire du triangle OAB est égale à 2.

5) Déterminer l'aire du quadrilatère $OACB$.



Exercice 2 (5 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$ et $C(0, -1, 1)$.

1) Soit S la sphère de centre A et passant par C .

a) Montrer que le rayon de S est égal à 3.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de S est $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 2 = 0$.

2) a) Vérifier que B appartient à S .

b) Soit P le plan tangent à S en B .

Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

3) Soit S' l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 2 = 0$$

a) Montrer que S' est la sphère de centre C et de rayon 2.

b) Montrer que P et S' sont tangents.

c) Justifier que $H(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ est le point de contact de P et S' .

4) a) Montrer que $M(x, y, z) \in S \cap S'$ si et seulement si $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases}$

b) On considère le plan $Q : 3x - 2 = 0$.

Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire à Q au point $\Omega(\frac{2}{3}, -1, 1)$.

c) Montrer que Q coupe S' suivant le cercle Γ de centre Ω et de rayon $r = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

d) Déterminer alors $S \cap S'$.

Exercice 3 (3.5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 2\sqrt{u_n} + 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que $u_{n+1} - 1 = (\sqrt{u_n} - 1)^2$.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

d) Montrer que la limite de (u_n) est égale à 1.

2) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{u_k} = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \dots + \sqrt{u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n > n + 1$.

b) En déduire la limite de (S_n) .

3) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{u_k} = 1 + \frac{1}{2}(u_k - u_{k+1})$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 3 - \frac{1}{2}u_{n+1}$.

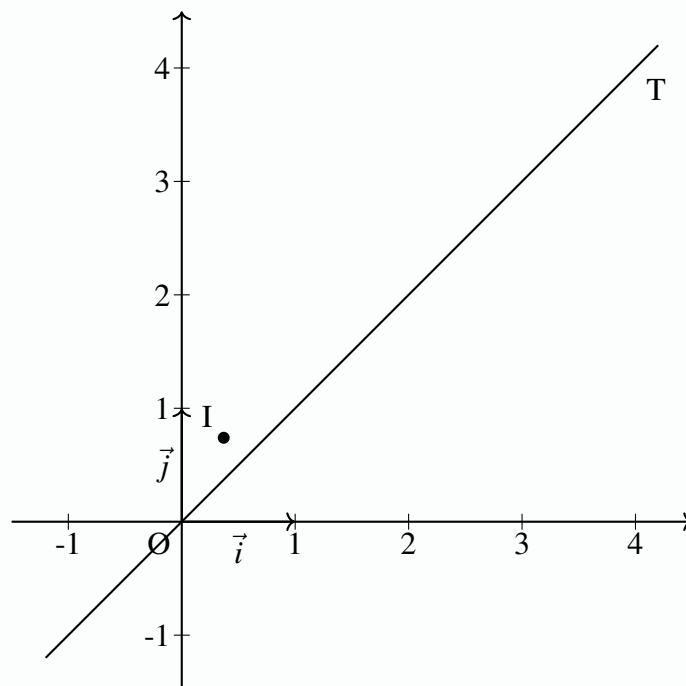
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - n$.

Exercice 4 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x + x \ln^2 x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.
- 2)
 - a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x + (\sqrt{x} \ln x)^2$.
 - b) En déduire que f est continue à droite en 0.
- 3) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 4)
 - a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = (1 + \ln x)^2$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Montrer que $I(\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .
- 6)
 - a) Montrer que $y = x$ est une équation de la tangente T à (C_f) au point $A(1, f(1))$.
 - b) Etudier la position de T et (C_f) .
- 7) Dans la **figure 2** de l'annexe, on a placé le point I et on a tracé la tangente T . Tracer la Tangente au point I et la courbe (C_f) .
- 8) Soit λ un réel vérifiant $0 < \lambda < 1$.
On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. On pose $J = \int_{\lambda}^1 2x \ln x dx$.
 - a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $2f(x) = xf'(x) + f(x) - 2x \ln x$.
 - b) En déduire que $2A(\lambda) = f(1) - \lambda f(\lambda) - J$.
 - c) Par intégration par partie, Montrer que $J = \int_{\lambda}^1 2x \ln x dx = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^2 \ln(\lambda) - \frac{1}{2}$.
 - d) Déterminer alors $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$.



1) a) $(2 - 2i\sqrt{3})^2 = 2^2 - 2(2)(2i\sqrt{3}) + (2i\sqrt{3})^2 = 4 - 8i\sqrt{3} - 12 = -8 - 8i\sqrt{3}$

b) $\Delta = (-4i)^2 - 4(1)(-2 + 2i\sqrt{3}) = -16 + 8 - 8i\sqrt{3} = -8 - 8i\sqrt{3} = (2 - 2i\sqrt{3})^2$.
 $\delta = (2 - 2i\sqrt{3})$ est racine carrée de Δ . Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{4i - (2 - 2i\sqrt{3})}{2} = \frac{-2 + i(4 + 2\sqrt{3})}{2} = -1 + i(2 + \sqrt{3})$$

$$z_2 = \frac{4i + (2 - 2i\sqrt{3})}{2} = \frac{2 + i(4 - 2\sqrt{3})}{2} = 1 + i(2 - \sqrt{3})$$

Les solutions de (E) sont $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i(2 - \sqrt{3}), -1 + i(2 + \sqrt{3})\}$.

2) a) On a $z_C = \sqrt{3} + 3i$, donc la partie imaginaire de C est 3. L'équation de la droite Δ étant $y = 3$, on en déduit que C appartient à Δ .

b)

$$z_C = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

Par conséquent, un argument de z_C est $\arg(z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Pour construire C , il suffit de tracer la demi-droite d'origine O faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe $(O, \vec{u})$. Le point C est l'intersection de cette demi-droite avec la droite Δ .

3) a) L'abscisse du milieu de $[AB]$ est $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i(2 - \sqrt{3}) - 1 + i(2 + \sqrt{3})}{2} = \frac{i(4)}{2} = 2i = z_H$ Donc H est le milieu du segment $[AB]$.

b)

$$z_C - z_H = \sqrt{3} + 3i - 2i = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_A - z_B = 1 + i(2 - \sqrt{3}) - (-1 + i(2 + \sqrt{3})) = 2 - 2i\sqrt{3} = 4 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

c) $\frac{\vec{Z}_{\vec{HC}}}{\vec{Z}_{\vec{BA}}} = \frac{z_C - z_H}{z_A - z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{4e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}$. Les vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{HC}$ sont orthogonaux, ce qui prouve que la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (HC) au point H (puisque H appartient à (AB) en tant que milieu).

d) La partie réelle de z_A est 1. Or Δ' a pour équation $x = 1$, donc $A \in \Delta'$. De plus, comme $(AB) \perp (HC)$ et $A \in \Delta'$, on trace (AB) passant par H perpendiculaire à (HC) . L'intersection de cette perpendiculaire avec Δ' donne le point A . B s'obtient comme symétrique de A par rapport à H .

4) a) $OH = |z_H| = |2i| = 2$. $AB = |z_A - z_B| = |4e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 4$. On a bien $OH = \frac{AB}{2}$.

Dans le triangle OAB , la médiane $OH = \frac{AB}{2} = HA = HB$, donc O est un point du cercle ζ de diamètre $[AB]$ par suite le triangle OAB est rectangle en O .

b) $z_A z_B = (1 + i(2 - \sqrt{3}))(-1 + i(2 + \sqrt{3})) = -1 + 2i\sqrt{3} - (4 - 3) = -1 + 2i\sqrt{3} - 1 = -2 + 2i\sqrt{3}$

c) L'aire du triangle OAB rectangle en O est $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2}$.

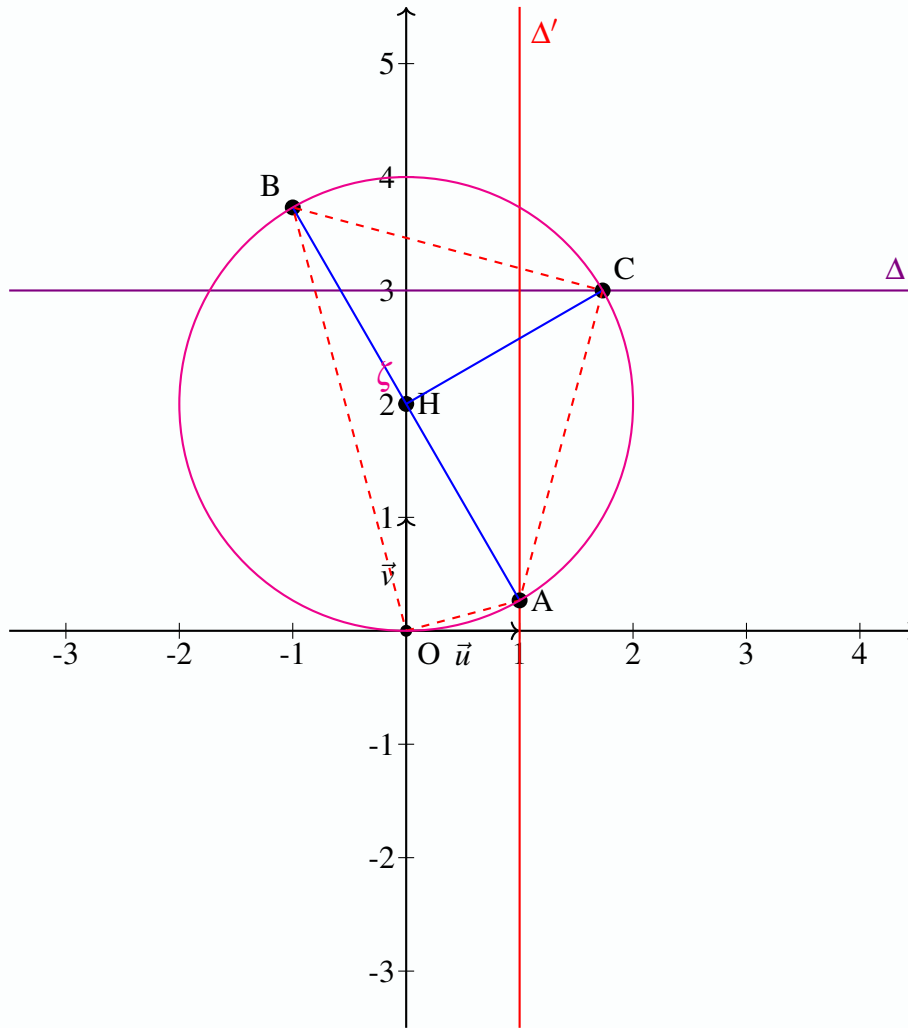
$$OA \times OB = |z_A| \times |z_B| = |z_A z_B| = |-2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

L'aire est donc $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{4}{2} = 2$.

- 5) L'aire du quadrilatère $OACB$ est la somme des aires des triangles OAB et ABC . Le triangle ABC a pour base $[AB]$ et pour hauteur issue de C le segment $[HC]$ (puisque $(HC) \perp (AB)$).

$$AB = 4 \text{ et } HC = |z_C - z_H| = 2. \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times HC}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4.$$

Donc, l'aire totale $\mathcal{A}_{OACB} = \mathcal{A}_{OAB} + \mathcal{A}_{ABC} = 2 + 4 = 6$.



Correction : Exercice 2

- 1) a) Le rayon de S est $R = AC = \sqrt{(0-3)^2 + (-1-(-1))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0 + 0} = 3$

- b) L'équation de S de centre $A(3, -1, 1)$ et de rayon 3 est :

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 2 = 0$$

- 2) a) On remplace les coordonnées de $B(2, 1, -1)$ dans l'équation de S :

$$2^2 + 1^2 + (-1)^2 - 6(2) + 2(1) - 2(-1) + 2 = 4 + 1 + 1 - 12 + 2 + 2 + 2 = 12 - 12 = 0$$

Donc $B \in S$.

- b) Le plan P est tangent à S en B , donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à P .

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$$

L'équation de P est de la forme $-1(x-2) + 2(y-1) - 2(z+1) = 0$.

$$-x + 2 + 2y - 2 - 2z - 2 = 0 \implies -x + 2y - 2z - 2 = 0 \implies x - 2y + 2z + 2 = 0$$

3) a) L'équation de S' :

$$x^2 + (y^2 + 2y) + (z^2 - 2z) = 2 \implies x^2 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 = 2$$

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$

C'est l'équation d'une sphère de centre $C(0, -1, 1)$ et de rayon $R' = \sqrt{4} = 2$.

b) $d(C, P) = \frac{|0 - 2(-1) + 2(1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|2 + 2 + 2|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$ Puisque $d(C, P) = R' = 2$, le plan P et la sphère S' sont tangents.

c) $-\frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = -\frac{6}{3} + 2 = 0$, donc $H \in P$.

On a : $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur normal de P , $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

H est le projeté orthogonal de C sur P , donc le point de contact de P et S' .

4) a) $M \in S \cap S'$ équivaut au système des deux équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1) = 0$, on obtient $(-6x + 2) - (-2) = 0 \implies -6x + 4 = 0 \implies 3x - 2 = 0$. Le système équivaut donc à garder l'équation de S' et la différence, donnant le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

b) Le plan Q a pour vecteur normal $\vec{n}_Q \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{n}_Q$. La droite (AC) est donc perpendiculaire à Q . Le point d'intersection $\Omega(x, y, z)$ appartient à (AC) , d'où $y = -1$ et $z = 1$.

En remplaçant dans l'équation de Q , $3x - 2 = 0 \implies x = \frac{2}{3}$. $\Omega(\frac{2}{3}, -1, 1)$.

c) L'intersection de la sphère S' et du plan Q est un cercle Γ de centre Ω (projeté de C sur Q) et de rayon $r = \sqrt{R'^2 - C\Omega^2}$.

$$C\Omega = |x_\Omega - x_C| = \frac{2}{3} \implies r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

d) $S \cap S' = S' \cap Q = \Gamma$ de centre $\Omega(\frac{2}{3}, -1, 1)$ et de rayon $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Correction : Exercice 3

1) a) $u_{n+1} - 1 = (u_n - 2\sqrt{u_n} + 2) - 1 = u_n - 2\sqrt{u_n} + 1 = (\sqrt{u_n} - 1)^2$.

- b)** Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 4 > 1$. Vraie . Soit $n \geq 0$, Supposons que $u_n > 1$. Montrons que $u_{n+1} > 1$.
Puisque $u_n > 1$, on a $\sqrt{u_n} > 1$, donc $\sqrt{u_n} - 1 > 0$. Le carré $(\sqrt{u_n} - 1)^2 > 0 \implies u_{n+1} - 1 > 0 \implies u_{n+1} > 1$. **Conclusion** : $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c)** $u_{n+1} - u_n = -2\sqrt{u_n} + 2 = -2(\sqrt{u_n} - 1)$. Comme $\sqrt{u_n} > 1$, on a $\sqrt{u_n} - 1 > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est décroissante.
La suite (u_n) est minorée par 1 et décroissante, la suite (u_n) converge vers une limite réelle L .
- d)** On pose $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$, on a : $f(u_n) = u_{n+1}$, f est continue en L , d'où $f(L) = L \Leftrightarrow L = L - 2\sqrt{L} + 2 \implies 2\sqrt{L} = 2 \implies \sqrt{L} = 1 \implies L = 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- 2) a)** On a $u_k > 1 \implies \sqrt{u_k} > 1$ pour tout entier k . $\sum_{k=0}^n \sqrt{u_k} > \sum_{k=0}^n 1$. Donc $S_n > (n+1) \times 1 \implies S_n > n+1$.

- b)** Par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$, et $S_n > n+1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

- 3) a)** D'après la définition, $u_{k+1} = u_k - 2\sqrt{u_k} + 2 \implies 2\sqrt{u_k} = u_k - u_{k+1} + 2$. Donc $\sqrt{u_k} = 1 + \frac{1}{2}(u_k - u_{k+1})$.

- b)**

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2}(u_k - u_{k+1}) \right) = (n+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1})$$

$$\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{n+1} = 4 - u_{n+1}.$$

$$\text{Ainsi, } S_n = n+1 + \frac{1}{2}(4 - u_{n+1}) = n+1 + 2 - \frac{1}{2}u_{n+1} = n+3 - \frac{1}{2}u_{n+1}.$$

- c)** On a $S_n - n = 3 - \frac{1}{2}u_{n+1}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - n) = 3 - \frac{1}{2}(1) = \frac{5}{2}$.

Correction : Exercice 4

- 1)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \ln^2 x) = +\infty \times (1 + +\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln^2 x) = +\infty$$

Interprétation : La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

- 2) a)** Pour $x > 0$, $f(x) = x + x(\ln x)^2 = x + (\sqrt{x})^2 (\ln x)^2 = x + (\sqrt{x} \ln x)^2$.

- b)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (\sqrt{x} \ln x)^2 = 0 + 0^2 = 0 = f(0)$. f est continue à droite en 0.

- 3)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x \ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln^2 x) = +\infty$ La fonction n'est pas dérivable à droite en 0.

Graphiquement, la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point O .

- 4) a)** f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $\forall x > 0 : f'(x) = 1 + 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = 1 + \ln^2 x + 2 \ln x = (1 + \ln x)^2$

- b) Comme $(1 + \ln x)^2 \geq 0$ et ne s'annule qu'en $x = \frac{1}{e}$, car $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$, d'où $x = \frac{1}{e}$, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	$\frac{2}{e}$	$+\infty$

5) $f''(x) = 2(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

La dérivée seconde s'annule en $\frac{1}{e}$ en changeant de signe. Le point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est donc un point d'inflexion. Son ordonnée est $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(-1)^2 = \frac{2}{e}$. D'où $I\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$.

2ème méthode

Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = (1 + \ln x)^2 \geq 0$.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \left(1 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 = (1 - 1)^2 = 0$$

La fonction dérivée f' s'annule en $\frac{1}{e}$ **sans changer de signe**. On en déduit que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{1}{e}$, où elle possède une tangente horizontale.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \ln^2\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(-1)^2 = \frac{2}{e}$$

Conclusion : Le point $I\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$ est bien un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

Point d'inflexion à tangente horizontale

- 6) a) $f(1) = 1 + 1(\ln 1)^2 = 1$. $f'(1) = (1 + \ln 1)^2 = 1$. L'équation de T en A est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1(x - 1) + 1 \Rightarrow y = x$.
- b) $f(x) - x = x \ln^2 x \geq 0$ pour tout $x > 0$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	+

La courbe (C_f) est donc toujours au-dessus de la tangente T , elles se touchent en $A(1, 1)$.

7) La courbe et les tangentes. (ci-dessous)

8) a)

$$\begin{aligned}
 xf'(x) + f(x) - 2x \ln x &= x(1 + \ln x)^2 + (x + x \ln^2 x) - 2x \ln x \\
 &= x(1 + 2 \ln x + \ln^2 x) + x + x \ln^2 x - 2x \ln x \\
 &= x + 2x \ln x + x \ln^2 x + x + x \ln^2 x - 2x \ln x = 2x + 2x \ln^2 x = 2(x + x \ln^2 x) = 2f(x)
 \end{aligned}$$

b) On intègre la relation $2f(x) = xf'(x) + f(x) - 2x \ln x$ sur $[\lambda, 1]$. On reconnaît que $xf'(x) + f(x)$ est la dérivée du produit $(xf(x))$.

$$2 \int_{\lambda}^1 f(x) dx = \int_{\lambda}^1 (xf(x))' dx - \int_{\lambda}^1 2x \ln x dx$$

$$2A(\lambda) = [xf(x)]_{\lambda}^1 - J = 1f(1) - \lambda f(\lambda) - J$$

c) Par intégration par parties pour J , on pose $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x \Rightarrow v(x) = x^2$.

$$J = [x^2 \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 x^2 \left(\frac{1}{x} \right) dx = (0 - \lambda^2 \ln \lambda) - \int_{\lambda}^1 x dx$$

$$J = -\lambda^2 \ln \lambda - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\lambda}^1 = -\lambda^2 \ln \lambda - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) = \frac{1}{2} \lambda^2 - \lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{2}$$

d) Limite de l'aire quand $\lambda \rightarrow 0^+$: $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\lambda + \lambda \ln^2 \lambda) = 0$ (croissance comparée).

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J = 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \text{ Donc } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 2A(\lambda) = 1 - 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}. \text{ L'aire limite est } A(0) = \frac{3}{4}.$$

