

Exercice 1 (4,5 pts)

$A(1, 2, 0)$; $B(3, -2, 2)$; $C(-1, 0, 4)$ et $G(1, 0, 2)$

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = -12\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k} = -12(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

b) On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ est un vecteur normal de P donc $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur normal de P donc $P : x + y + z + d = 0$ or $A \in P$ donc $1 + 2 + d = 0$ donc $d = -3$
ainsi $P : x + y + z - 3 = 0$

2) a) $\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $GA = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $GA = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $GA = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$

ainsi $GA = GB = GC = 2\sqrt{2}$

b) $P : x + y + z - 3 = 0$ et $G(1, 0, 2)$ on a : $1 + 0 + 2 - 3 = 0$ donc $G \in P$ (1)

On a : $GA = GB = GC$ (2)

de (1) et (2) G est le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC .

3) a) On a : S la sphère de centre I qui coupe P suivant le cercle $(\mathcal{C})$ donc G est le projeté orthogonal de I sur P et on a $\Delta \perp P$ en G donc $\Delta // (IG)$ ainsi $I \in \Delta$.

b) Soit R le rayon de la sphère S donc $R = \sqrt{11}$

Soit r le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ donc $r = GA = 2\sqrt{2}$

On a $IG^2 = d^2(I, P)$ et $R^2 = r^2 + d^2(I, P)$ donc $R^2 = r^2 + IG^2$ donc $IG^2 = R^2 - r^2$

$IG^2 = 11 - 8$ ainsi $IG^2 = 3$

c) On a $\Delta \perp P$ donc $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ et $G \in \Delta$ donc

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

d) Soit S' la sphère de centre I' et de rayon $\sqrt{11}$ qui coupe le plan P suivant le cercle $(\mathcal{C})$ donc $I' \in \Delta$
donc $I'(1 + \alpha ; \alpha ; 2 + \alpha)$

$d(I', P) = \sqrt{3}$ donc $\frac{|1 + \alpha + \alpha + 2 + \alpha - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$ donc $\frac{|3\alpha|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ donc $3|\alpha| = 3$ donc $|\alpha| = 1$ donc

$\alpha = -1$ ou $\alpha = 1$ ainsi ils existent deux sphères de centres $I_1(0, -1, 1)$ et $I_2(2, 1, 3)$ et de rayon $\sqrt{11}$ qui coupent le plan P suivant le cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice 2 (4,5 pts)

I) (E) : $z^2 - \sqrt{2}(2+i)z + 2(1+i) = 0$

$a = 1$; $b = -\sqrt{2}(2+i)$ et $c = 2(1+i)$

$$\Delta = [-\sqrt{2}(2+i)]^2 - 8(1+i) = 2(4+4i-1) - 8 - 8i = 6+8i-8-8i = -2 = (i\sqrt{2})^2$$

donc $\delta = i\sqrt{2}$ est une racine carrée de Δ

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}(2+i) - i\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad ; \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}(2+i) + i\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{\sqrt{2}, \sqrt{2} + i\sqrt{2}\}$$

II) $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

1) (E_{θ}) : $z^2 - (3e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 2(1 + e^{2i\theta}) = 0$

a) On a : $(2e^{i\theta})^2 - (3e^{i\theta} + e^{-i\theta})2e^{i\theta} + 2(1 + e^{2i\theta}) = 4e^{2i\theta} - 6e^{2i\theta} - 2 + 2 + 2e^{2i\theta} = 0$

donc $2e^{i\theta}$ est une solution de (E_{θ})

b) $z_1 = 2e^{i\theta}$;

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = 2(1 + e^{2i\theta}) \quad \text{donc} \quad z_2 = \frac{2(1+e^{2i\theta})}{z_1} = \frac{2(1+e^{2i\theta})}{2e^{i\theta}} = \frac{1+e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + e^{i\theta}$$

ainsi $z_2 = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

2) $z_A = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$; $z_B = 3e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $z_C = 2e^{i\theta}$

a) $z_A = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$

$$z_C = 2e^{i\theta} = 2(\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \cos \theta + 2i \sin \theta$$

donc $z_A = \operatorname{Re}(z_C)$ ainsi A est le projeté orthogonal de C sur $(O, \vec{u})$ d'où la construction du point A.

b) $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$$z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = 3e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2e^{i\theta} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

on a donc $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{CB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow OABC$ est un parallélogramme d'où la construction du point B

c) On a $OABC$ est un parallélogramme et $[AC]$ est une diagonale donc les triangles OAC et ABC sont isométriques donc $\mathcal{A}$ est deux fois l'aire du triangle OAC qui est rectangle en A ainsi

$$\mathcal{A} = 2 \times \frac{AC \times OA}{2} = OA \times AC = |z_C - z_A| \times |z_A| = |2e^{i\theta} - e^{i\theta} - e^{-i\theta}| \times |2 \cos \theta|$$

$$= |e^{i\theta} - e^{-i\theta}| \times |2 \cos \theta| = |2i \sin \theta| \times |2 \cos \theta| = 2 \times 2 |\sin \theta| \times |\cos \theta| = 2 \times 2 \sin \theta \times \cos \theta$$

car pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin \theta > 0$ et $\cos \theta > 0$

ainsi $\mathcal{A} = 2 \sin(2\theta)$ [notion vue en 3^{ème} $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$]

d) Pour que $\mathcal{A}$ soit maximale il faut que $\sin(2\theta)$ soit maximale donc il faut que $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

donc $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ or $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

Exercice 3 (4,5 pts)

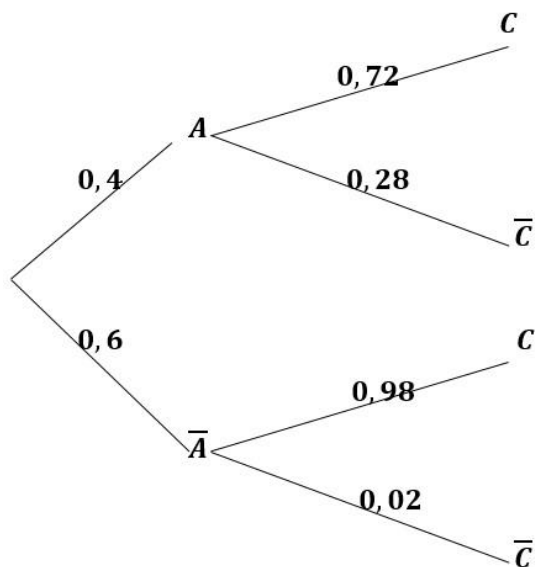
1) $p(T_1) = p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \times p(C_2) = 0,9 \times 0,8 = 0,72$ $\left[C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont indépendants} \right]$

$$p(T_2) = p(C_1 \cup C_2) = p(C_1) + p(C_2) - p(C_1 \cap C_2) = 0,9 + 0,8 - 0,72 = 1,7 - 0,72 = 0,98$$

2) a) 40% des circuits fabriquée sont du type T_1 donc $p(A) = 0,4$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0,6$

$$p(C/A) = p(T_1) = 0,72 ; \quad p(\bar{C}/A) = 1 - p(C/A) = 0,28$$

$$p(C/\bar{A}) = p(T_2) = 0,98 ; \quad p(\bar{C}/\bar{A}) = 1 - p(T_2) = 0,02$$



b) $p(C) = p(C \cap A) + p(C \cap \bar{A}) = p(A) \times p(C/\bar{A}) + p(\bar{A}) \times p(C/\bar{A})$
 $= 0,4 \times 0,72 + 0,6 \times 0,98 = 0,288 + 0,588 = 0,876$

c) $p(A/C) = \frac{p((A \cap C))}{p(C)} = \frac{0,288}{0,876} = 0,329$

3) a) Cette question est mal posée.

On assimile l'achat des circuits à tirage successif avec remise donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = p(\bar{C}/\bar{A}) = 0,02$ d'où la loi de probabilité de X

$$p(X = k) = C_n^k (p)^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k (0,002)^k (0,998)^{n-k} ; \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

b) $E(X) = 20 ; \quad E(X) = n \times p = 0,02n$ donc $0,02n = 20$ ainsi $n = 1000$

Exercice 4 (6,5 pts)

I) Pour $x \in]0, \alpha]$; (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses donc pour $x \in]0, \alpha]$ on a $g(x) \leq 0$

Pour $x \in [\alpha, 1]$; (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses donc pour $x \in [\alpha, 1]$ on a $g(x) \geq 0$

Pour $x \in [\alpha, +\infty[$; (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses donc pour $x \in [\alpha, +\infty[$ on a $g(x) \leq 0$

Conclusion	0		α		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

II) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$; $x \in]0, +\infty[$

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de (C_f) .

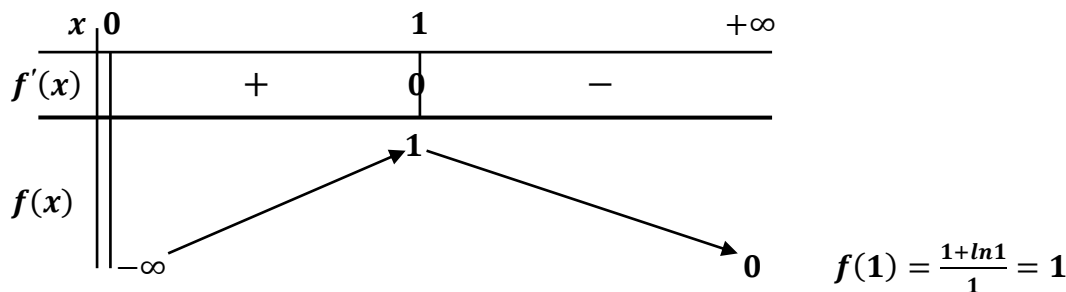
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$

la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale de (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$; pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

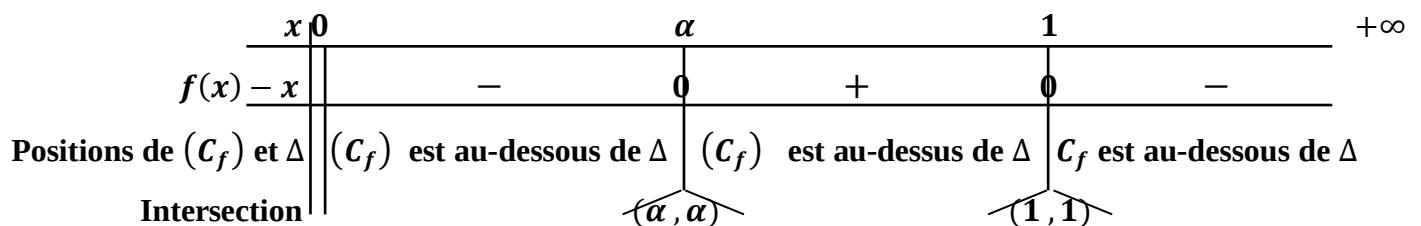
b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a : $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ donc $f'(x)$ prend le signe de $-\ln x$ sur $]0, +\infty[$



3) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a :

$$f(x) - x = \frac{1 + \ln x}{x} - x = \frac{1 + \ln x}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{1 - x^2 + \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$; on a : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x}$ donc $f(x) - x$ prend le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$



c) Voir traçage de (C_f) dans l'annexe

4) a) On a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \alpha^2 - 1$

b) $\mathcal{A} = \int_{\alpha}^1 |f(x) - x| dx = \int_{\alpha}^1 (f(x) - x) dx$ car pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on a : $f(x) - x \geq 0$

$$= \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1 + \ln x}{x} - x \right) dx = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x - x \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{\alpha}^1$$

$$= \ln 1 + \frac{1}{2} (\ln 1)^2 - \frac{1}{2} - \left(\ln \alpha + \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \ln \alpha - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 = -\frac{1}{2} - (\alpha^2 - 1) - \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2$$

$$= -\frac{1}{2} - \alpha^2 + 1 - \frac{1}{2} (\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1) + \frac{1}{2} \alpha^2$$

$$= -\frac{1}{2} - \alpha^2 + 1 - \frac{1}{2}\alpha^4 + \alpha^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2 = -\frac{1}{2}\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2(1 - \alpha^2)$$

$$5) \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = \frac{1}{2}$; $\alpha < U_0 < 1$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $\alpha < U_n < 1$ et montrons que $\alpha < U_{n+1} < 1$

On a : f est croissante sur $[\alpha, 1]$ et $\alpha < U_n < 1 \Rightarrow f(\alpha) < f(U_n) < f(1) \Rightarrow \alpha < U_{n+1} < 1$

[d'après 3) b) on a $f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$]

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $\alpha < U_n < 1$

b) D'après 3) b) pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on $f(x) - x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq x$

or $\alpha < U_n < 1$ donc $f(U_n) \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$ ainsi la suite (U_n) est croissante

b) La suite (U_n) est croissante et majorée par 1 donc la suite (U_n) est convergente

f est continue sur $[\alpha, 1]$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$; $L \in [\alpha, 1]$ donc f est continue L

$U_{n+1} = f(U_n)$ donc $L = f(L) \Rightarrow L = \alpha$ ou $L = 1$

or la suite (U_n) est croissante donc $U_n > U_0$ donc $U_n > \frac{1}{2}$ donc $L > \frac{1}{2}$ donc $L = 1$

ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

Annexe

Figure 1

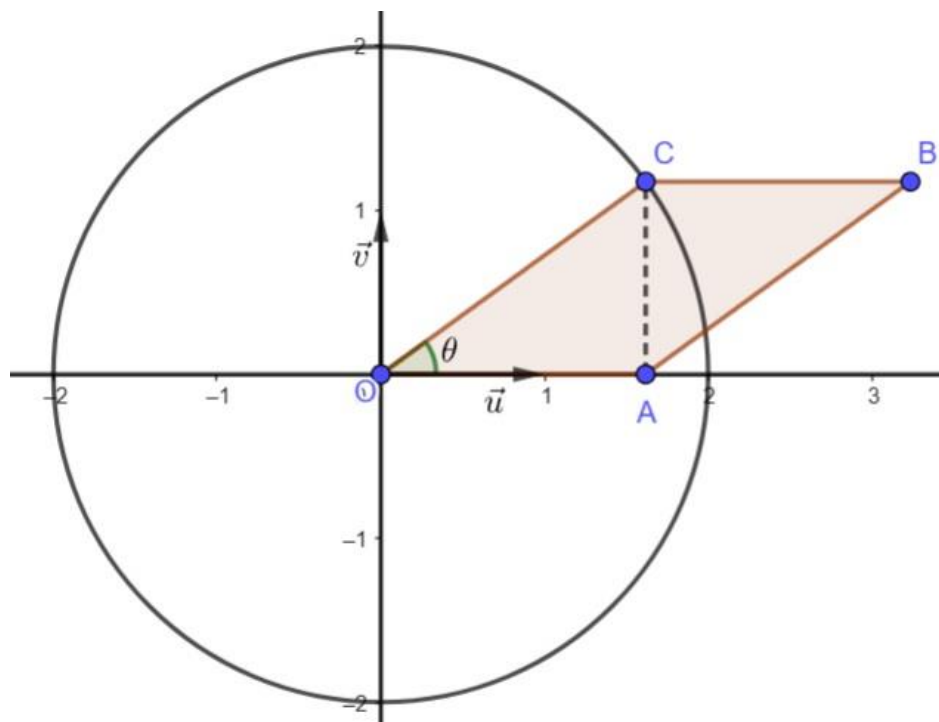


Figure 2

