

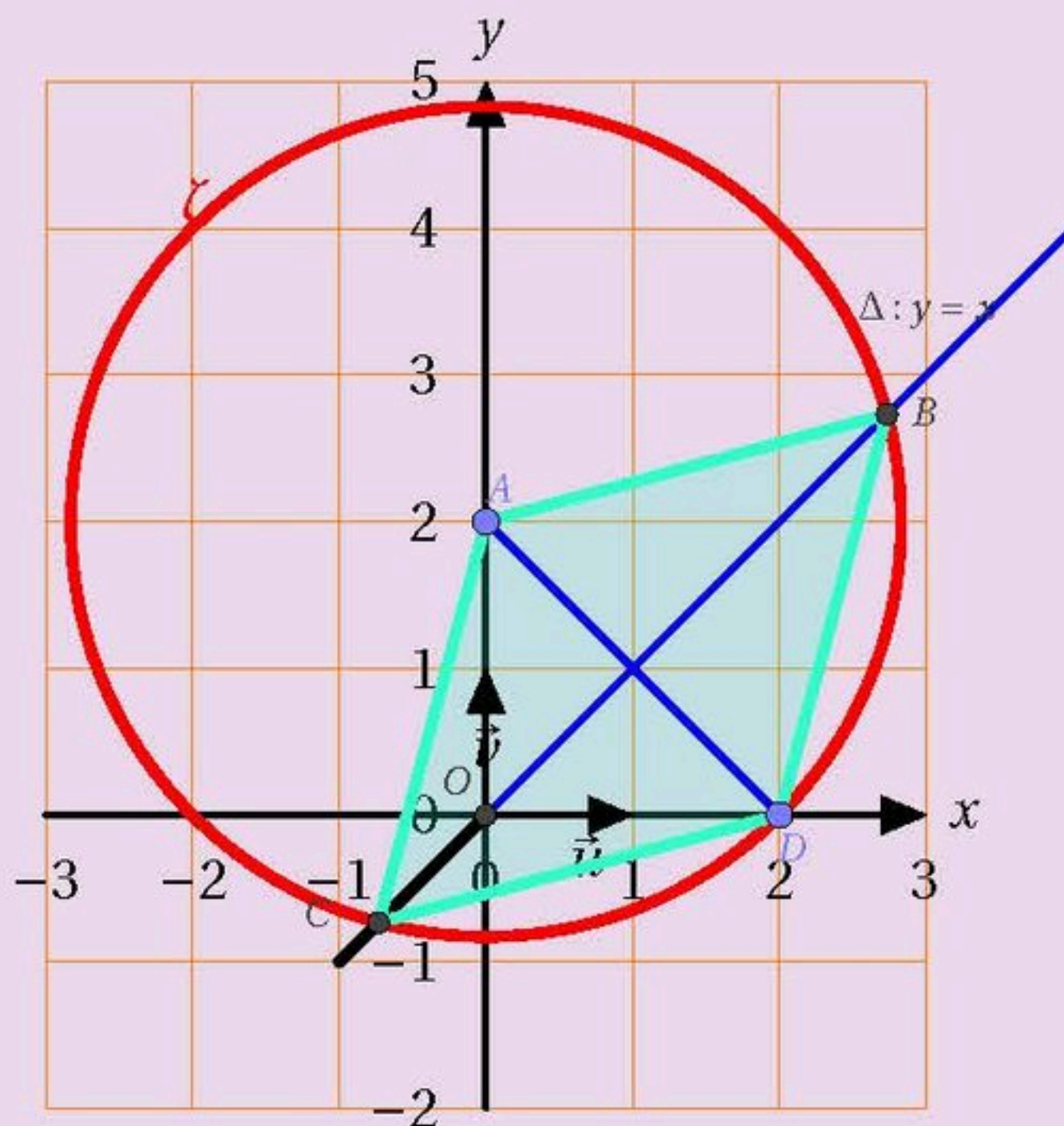
Correction Examen du Baccalauréat session 2023

Section : Sciences Techniques

Coefficient de l'épreuve : 3

Exercice n 1 (5 points)

- 1 a (E) $\Leftrightarrow z^2 - 2(1+i)z = 4i \Leftrightarrow [z - (1+i)]^2 - (1+i)^2 = 4i \Leftrightarrow [z - (1+i)]^2 = 6i = 3(1+i)^2 = [\sqrt{3}(1+i)]^2$
- b $[z - (1+i)]^2 = [\sqrt{3}(1+i)]^2$ donc $z_1 = \sqrt{3}(1+i) + (1+i) = (1+\sqrt{3})(1+i)$ et $z_2 = -\sqrt{3}(1+i) + (1+i) = (1-\sqrt{3})(1+i)$
- 2 a On a $(2i)^3 - (2+i4)(2i)^2 - 4(2i) - 8 = -8i + 8 + 16i - 8i - 8 = 0$ donc $(2i)$ est une solution de (E')
- b On a : $(z-2i)[z^2 - 2(1+i)z - 4i] = z^3 - 2(1+i)z^2 - 4iz - 2iz^2 + 4i(1+i)z - 8 = z^3 - (2+i4)z^2 - 4z - 8$
- c $z^3 - (2+i4)z^2 - 4z - 8 = 0 \Leftrightarrow (z-2i)[z^2 - 2(1+i)z - 4i] = 0 \Leftrightarrow (z-2i) = 0$ ou $z^2 - 2(1+i)z - 4i = 0$ donc $z = 2i$ ou $z = z_1 = (1+\sqrt{3})(1+i)$ ou $z = z_2 = (1-\sqrt{3})(1+i)$
- 3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = (1+\sqrt{3})(1+i)$, $z_C = (1-\sqrt{3})(1+i)$ et $z_D = 2$
- a $AB = |z_B - z_A| = |(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,
 $AC = |z_C - z_A| = |(1-\sqrt{3}) - i(\sqrt{3}+1)| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et
 $AD = |z_D - z_A| = |2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $AB = AC = AD = 2\sqrt{2}$ par suite les points B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$
- b .

Placer les points A et D, puis construire le cercle $\mathcal{C}$

- c On a $z_B = (1+\sqrt{3})(1+i) = (1+\sqrt{3})\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $\arg(z_B) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ de même $z_C = (1-\sqrt{3})(1+i) = -(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$ donc $\arg(z_C) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d les points B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C} \cap \Delta: y = x$ avec $x_B = 1+\sqrt{3} > 0$ et $x_C = 1-\sqrt{3} < 0$
- 4 $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$ et $Z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = 2 - (1-\sqrt{3}) - i(1-\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1) = Z_{\overrightarrow{AB}}$ donc ABDC est un parallélogramme, comme $AB = AC$ d'où ABDC est un losange. L'aire de ABDC est $\mathcal{A} = \frac{AD \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{3}$ avec $BC = |z_C - z_B| = |-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{6}$

Exercice n 2 (5points)

1 a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$

b $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{n}\| = \frac{1}{2} \sqrt{32} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n} \neq \vec{0}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ par suite $\mathcal{P} : 4y - 4z + d = 0$ $B \in \mathcal{P}$ donc $-20 + d = 0 \Leftrightarrow d = 20$ par suite $\mathcal{P} : 4y - 4z + 20 = 0 \Leftrightarrow y - z + 5 = 0$

2 a $d(D, \mathcal{P}) = \frac{|2 - 3 + 5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

b $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A} \times d(D, \mathcal{P})}{3} = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3}$

3 a On a $h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d = \frac{(-4)^2 + 0^2 + (-6)^2}{4} - 8 = 13 - 8 = 5 > 0$ d'où $\mathbf{S}$ est une sphère de centre $K(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ donc $k(2, 0, 3)$ et de rayon $R = \sqrt{h} = \sqrt{5}$

b $d(K, \mathcal{P}) = \frac{|-3 + 5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{5}$ donc $\mathcal{P}$ coupe la sphère $\mathbf{S}$ suivant un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\mathbf{I}(x, y, z)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3}$ avec I est le projeté orthogonal de K sur le plan $\mathcal{P}$ donc $(IK) \perp \mathcal{P}$ par suite $\vec{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (IK) donc

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \alpha \\ z = 3 - \alpha \\ y - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

donc $\alpha - 3 + \alpha + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ par suit $x = 2$, $y = -1$ et $z = 4$ donc $I(2, -1, 4)$

4 Pour tout réel m , on considère $\mathbf{D}_m(1, m, 5 - m)$ et la sphère $\mathbf{S}_m$ de diamètre $[\mathbf{CD}_m]$

a pour tout réel m , $\overrightarrow{BD_m} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -m \end{pmatrix} = m\vec{N}$ par suite $(BD_m) \perp \mathcal{P}$ en B d'où D_m appartient à la droite passant par B et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

b Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BD_m} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -m \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2m + 2m = 0$.

c On a $\overrightarrow{BD_m} \perp \overrightarrow{BC}$: donc B appartient à $\mathbf{S}_m$ de diamètre $[\mathbf{CD}_m]$

d On a : $\Omega_m(2, \frac{m}{2} - 1, 4 - \frac{m}{2}) = D_m * C$ le centre de la sphère S_m et $\overrightarrow{I\Omega_m} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m}{2} \\ -\frac{m}{2} \end{pmatrix} = \frac{m}{2}\vec{N}$, d'où I est le projeté orthogonal de Ω_m sur $\mathcal{P}$ pour tout réel m , comme $B \in \mathcal{P} \cap S_m$ et $C \in \mathcal{P} \cap S_m$ d'où $\mathcal{P}$ coupe la sphère $\mathbf{S}_m$ suivant un cercle. $IB = IC = \sqrt{3} = r$ d'où $\mathcal{P} \cap \mathbf{S}_m = \mathcal{C}_{(I, \sqrt{3})}$

Exercice n 3 (4 points)

- 1 a h est continue et strictement croissante sur $[0,4]$ donc $h([0,4]) = [h(0), h(4)] = [0,4]$
 b Voir figure 1
 c On a $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$ donc (u_n) est croissante et majorée par 4 par suite (u_n) est convergente.
- 2 a Pour $n = 0$ on a : $0 < u_0 = 1 \leq 4$ (**vraie**), soit $n \geq 0$ on suppose que $0 < u_n \leq 4$. Montrons que $0 < u_{n+1} \leq 4$ On a : $0 < u_n \leq 4$ et h strictement croissante sur $[0,4]$ d'où $h(0) < h(u_n) \leq h(4)$ donc $0 < u_{n+1} \leq 4$ par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 4$
 b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\frac{1}{4}(1-u_n)} \geq 1$. car $1 - \frac{1}{4}u_n \geq 0$ donc $e^{\frac{1}{4}(1-u_n)} \geq e^0 = 1$
 on a $0 < u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ par suite (u_n) est croissante
- 3 (u_n) est croissante et majorée par 4 d'où elle est convergente. On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ on a $h(u_n) = u_{n+1}$, h est continue en ℓ donc $h(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell e^{\frac{1}{4}(1-\ell)} = \ell \Leftrightarrow \ell(e^{\frac{1}{4}(1-\ell)} - 1) = 0$ d'où $\ell = 0$ ou $1 - \frac{1}{4}\ell = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 4$ comme (u_n) est croissante et majorée par 4 donc $\ell = 4$.
- 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
 a Pour $n = 1$ on a : $u_1 = e^{\frac{1}{4}(1-u_0)} = 1 \times e^{\frac{1}{4}(1-u_0)} = u_0 e^{\frac{1}{4}(1-u_0)} = h(u_0)$ (**Vraie**). Soit $n \geq 1$, on suppose que $u_n = e^{\frac{1}{4}(1-S_n)}$, montrons que $u_{n+1} = e^{\frac{1}{4}(1-S_{n+1})}$
 On a : $u_{n+1} = u_n e^{\frac{1}{4}(1-u_n)} = e^{\frac{1}{4}(1-S_n)} e^{\frac{1}{4}(1-u_n)} = e^{\frac{1}{4}(1-S_n + 1 - u_n)} = e^{\frac{1}{4}(2 - (S_n + u_n))} = e^{\frac{1}{4}(2 - S_{n+1})}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\frac{1}{4}(1-S_n)}$
 b On a : $u_n = e^{\frac{1}{4}(1-S_n)} \Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{1}{4}(1-S_n) \Leftrightarrow S_n = 4 - 4\ln(u_n)$ donc $\frac{S_n}{n} = 4 - 4\frac{\ln(u_n)}{n}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \underbrace{4\frac{\ln(u_n)}{n}}_0 = 4$.

Exercice n 4 (6 points)

A) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - \ln x$.

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 - \ln x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 - \ln x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + \frac{2}{x} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0) = +\infty$
- 2 a Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{2(x^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)}{x} = \frac{2(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})}{x}$
 b Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = 0$ donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin]0, +\infty[$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$\frac{5}{2} + \ln(\sqrt{2})$	

c g admet un minimum absolu en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) \geq g(\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$

B) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1+\ln x}{x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1+\ln x}{x} = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C_f) .

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \underbrace{\frac{1}{x}}_0 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite Δ : $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

c $f(x) - x = \frac{\ln x - 1}{x}$ donc $f(x) - x = 0$ donc $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - x$		- 0 +	
position de (C_f) / Δ	$\frac{\Delta}{(C_f)}$		$\frac{(C_f)}{\Delta}$

$$(C_f) \cap \Delta = \{A(e, e)\}$$

2 a Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{(2x + \frac{1}{x})x - (x^2 - 1 + \ln x)}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b On a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'où f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $f([0, +\infty]) = \mathbb{R}$

4 Voir figure n 2

5 a F est dérivable sur $]0, +\infty[$, $F'(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{x^2-1+\ln x}{x} = f(x)$ d'où F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$

b $S = \int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 2}{2}$

c $\mathcal{A} = e \times e - 2S = e^2 - 2S = e^2 - e^2 + 2 = 2$

Figure 1 (Exercice 3)

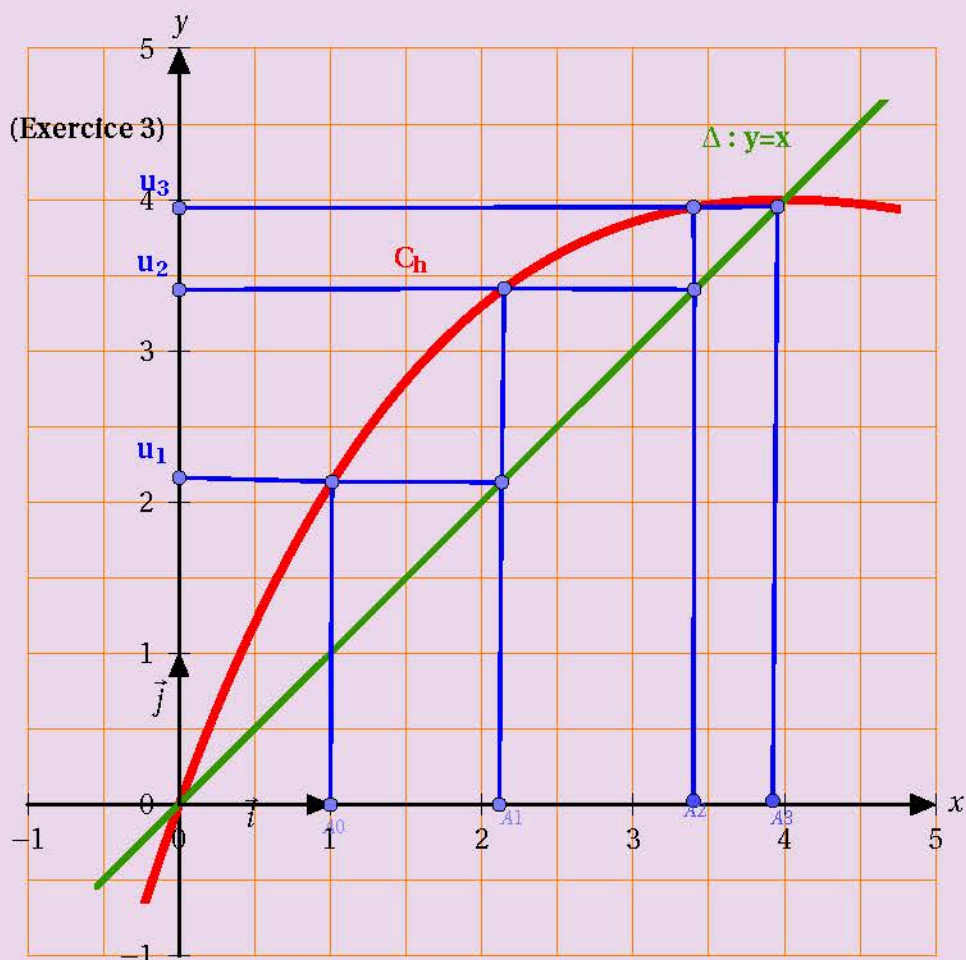


Figure 2 (Exercice 4)

