

Exercice 1

4,5 points

$$A(-1, -1, -1) ; B(-2, -1, 0) ; C(1, 1, -5) \text{ et } \vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1) \text{ a) } \diamond \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{d'où } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\vec{N}$$

◆ $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ alors $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés.

$$1) \text{ b) } \vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan } P \text{ alors } P : x + y + z + d = 0$$

comme $A(-1, -1, -1) \in P$ alors $-1 - 1 - 1 + d = 0$ donc $d = 3$ d'où $P : x + y + z + 3 = 0$.

$$1) \text{ c) } E(1, 0, 2) \text{ et } H(-1, -2, 0).$$

$$\diamond \vec{HE} \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0+2 \\ 2-0 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{HE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{N}$$

◆ $\vec{HE} = 2\vec{N}$ donc $(HE) \perp P$ et comme $H \in P$ ($-1 - 2 + 0 + 3 = 0$)
alors H est le projeté orthogonal de E sur le plan P .

$$1) \text{ d) } \mathcal{V}_{EABC} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AE}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-4 - 2 - 6| = \frac{12}{6} = 2$$

$$2) \text{ a) } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z-2)^2 - 4 - 9 = 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14$ alors S est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$.

$$2) \text{ b) } \diamond d(E, P) = \frac{|1+0+2+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} < \sqrt{14} \text{ alors } P \text{ coupe } S \text{ suivant un cercle } (\mathcal{C}_1).$$

◆ Comme H est le projeté orthogonal de E sur le plan P alors $(\mathcal{C}_1)$ est de centre H .

◆ Le cercle $(\mathcal{C}_1)$ est de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{14 - 12} = \sqrt{2}$

► P coupe S suivant le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre H et de rayon $\sqrt{2}$.

$$2) \text{ c) } \diamond A(-1, -1, -1) : 1 + 1 + 1 + 2 + 4 - 9 = 0 \text{ donc } A \in S.$$

$$\diamond B(-2, -1, 0) : 4 + 1 + 0 + 4 + 0 - 9 = 0 \text{ donc } B \in S.$$

► Comme A et B sont deux points du plan P alors A et B appartiennent à $(\mathcal{C}_1)$.



3) a) $Q : x - 5y + z - 3 = 0$.

♦ $\overrightarrow{N_P} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N_Q} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ alors $\overrightarrow{N_P}$ et $\overrightarrow{N_Q}$ ne sont pas colinéaires d'où P et Q sont sécants

♦ $A(-1, -1, -1) : -1 + 5 - 1 - 3 = 0$ donc $A \in Q$.

♦ $B(-2, -1, 0) : -2 + 5 + 0 - 3 = 0$ donc $B \in Q$.

► Comme A et B sont deux points de P alors P et Q sont sécants suivant la droite (AB) .

3) b) ♦ $E(1, 0, 2) : 1 + 0 + 2 - 3 = 0$ donc $E \in Q$.

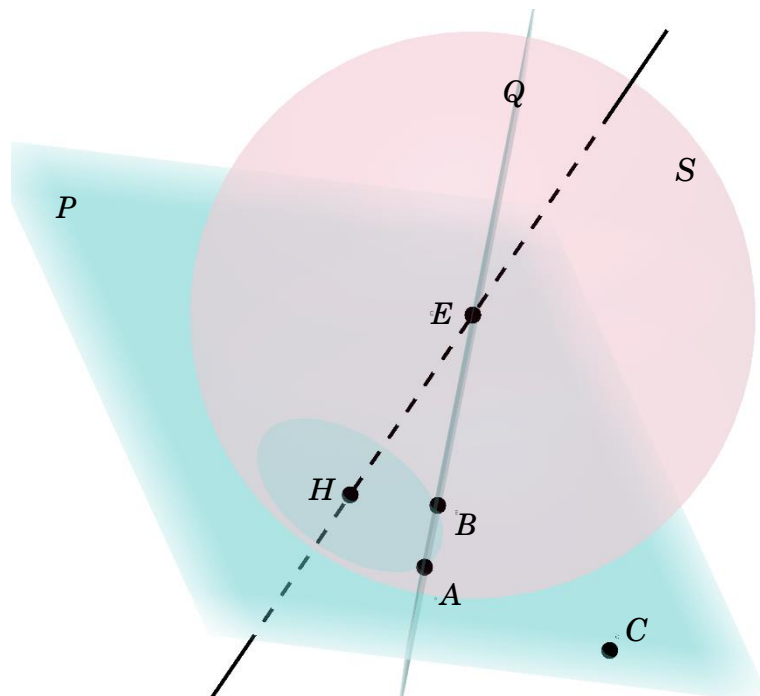
3) c) ♦ E est le centre de la sphère S .

► Comme $E \in Q$ alors Q coupe S suivant un cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre E et de rayon $R = \sqrt{14}$.

3) d) ♦ $A, B \in S \cap P = (\mathcal{C}_1)$

♦ $A, B \in S \cap Q = (\mathcal{C}_2)$

► $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ se coupent en A et B .



Exercice 2

4 points

$$1) \text{ a) } (u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $u_n > 1$.

• Pour $n = 0$, $u_0 = 2 > 1$. (la proposition est vraie pour $n = 0$).

• Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$

$$\diamond \text{ On a } u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n - 1}{u_n} - 1 = \frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n} = \frac{u_n - 1}{u_n} > 0 \text{ d'où } u_{n+1} > 1.$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

$$1) \text{ b) } \diamond u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1}{u_n} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{u_n} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}.$$

$$1) \text{ c) } \diamond u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n} < 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

► (u_n) est décroissante minorée par 1 alors (u_n) est convergente.

$$\diamond \text{ On a } \star u_{n+1} = f(u_n); \left(\text{avec } f(x) = \frac{2x-1}{x} \right)$$

★ (u_n) converge vers ℓ avec $\ell \geq 1$

★ f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc continue en ℓ .

$$\text{alors } \ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{2\ell - 1}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell - 1 \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1.$$

$$2) \text{ a) } v_n = \frac{1}{u_n - 1}. \quad \blacktriangleright v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n}} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1 \text{ alors } (v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison 1.}$$

$$2) \text{ b) } \diamond v_n = v_0 + nr = 1 + n.$$

$$2) \text{ c) } \diamond v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n u_n - v_n = 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1 + 1 + n}{1 + n} = \frac{n + 2}{n + 1}.$$

$$3) \text{ a) } S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n).$$

$$\diamond S_1 = \ln(u_0) + \ln(u_1) = \ln(u_0 \times u_1) = \ln\left(2 \times \frac{3}{2}\right) = \ln(3).$$

$$3) \text{ b) } \diamond S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n) = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n) = \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$\text{d'où } S_n = \ln(n + 2).$$

$$3) \text{ c) } \diamond S_n > 10 \Leftrightarrow \ln(n + 2) > 10 \Leftrightarrow n + 2 > e^{10} \Leftrightarrow n > e^{10} - 2 \text{ alors } n = 22025.$$



Exercice 3

4,5 points

1) a) $z_F = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$, $z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_I = -\frac{1}{2} + i$.

♦ $z_F - z_I = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i - (-\frac{1}{2} + i) = \frac{1}{2} + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

♦ $z_G - z_I = (\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i) - (-\frac{1}{2} + i) = \frac{\sqrt{3}-1+1}{2} + (\frac{1}{2}-1)i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

1) b) $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre I et de rayon 1.

♦ $IF = |z_F - z_I| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ alors $F \in (\mathcal{C})$.

♦ $IG = |z_G - z_I| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ alors $G \in (\mathcal{C})$.

1) c) ♦ $z_F - z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = i(z_G - z_I)$.

♦ $z_F - z_I = i(z_G - z_I) \Leftrightarrow \frac{z_F - z_I}{z_G - z_I} = i \Leftrightarrow \frac{z_{IF}}{z_{IG}} = i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{IF} \perp \overrightarrow{IG}$

alors le triangle IFG est rectangle en I .

2) Construction de F et G .

3) a) ♦ $((2 + 2\sqrt{3})i)^2 = -(4 + 8\sqrt{3} + 12) = -(16 + 8\sqrt{3}) = -16 - 8\sqrt{3}$.

alors $(2 + 2\sqrt{3})i$ est une racine carrée de $-16 - 8\sqrt{3}$.

3) b) ♦ $z^2 + 3z + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3} = 0$.

► $\Delta = 3^2 - 4(\frac{25}{4} + 2\sqrt{3}) = 9 - 25 - 8\sqrt{3} = -16 - 8\sqrt{3} = ((2 + 2\sqrt{3})i)^2$

► $z_1 = \frac{-3 + (2 + 2\sqrt{3})i}{2} = -\frac{3}{2} + (1 + \sqrt{3})i$; $z_2 = \frac{-3 - (2 + 2\sqrt{3})i}{2} = -\frac{3}{2} - (1 + \sqrt{3})i$

4) a) $z_K = -\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$.

♦ $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = \frac{-\frac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3}) - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{i\sqrt{3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = i\sqrt{3}$

♦ $\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = \frac{z_{FK}}{z_{IF}} = i\sqrt{3} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{FK} \perp \overrightarrow{IF}$ d'où $(FK) \perp (FI)$.

4) b) Construction de K et L .



4) c) ♦ $z_G - z_L = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i - \left(-\frac{3}{2} - i(1+\sqrt{3})\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right).$

♦ $(2+\sqrt{3})(z_F - z_I) = (2+\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + i\frac{(2\sqrt{3}+3)}{2}$

► alors $z_G - z_L = (2+\sqrt{3})(z_F - z_I)$

► $z_G - z_L = (2+\sqrt{3})(z_F - z_I) \Leftrightarrow \frac{z_G - z_L}{z_F - z_I} = \frac{z_{LG}}{z_{IF}} = (2+\sqrt{3}) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (GL) \parallel (FI).$

4) d) ♦ $(GL) \parallel (FI)$ alors $(LD) \perp (IG)$ d'où (LD) est tangente à $(\mathcal{C})$ en G .

♦ (KD) est tangente à $(\mathcal{C})$ en F .

♦ $d(I, (KL)) = \left| -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| = 1$ d'où (KL) est tangente à $(\mathcal{C})$.

alors le cercle $(\mathcal{C})$ est inscrit dans le triangle DKL .

Exercice 4

7 points

1) a) $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$

♦ $g(\ln 2) = 2$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

1) b) ♦ g est décroissante sur $]0, +\infty[$ alors $g'(x) < 0$

♦ $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite $y = 1$ sur $]0, +\infty[$ alors $g(x) > 1$.

2) a) $f(x) = \ln(e^x - 1).$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) = -\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) = +\infty.$

2) b) ♦ $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} = g(x).$

2) c) Le tableau de variation de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

2) d) ♦ $f(\ln 2) = \ln(e^{\ln 2} - 1) = \ln(2 - 1) = \ln(1) = 0.$

♦ Le signe de $f(x)$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$	-	○	+

3) a) ♦ $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(g(x)) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \ln(e^x) - \ln(e^x - 1) = x - f(x).$



3) b) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(g(x)) = -\ln(1) = 0$

► alors la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$.

3) c) ♦ Comme $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) > 1$ alors $f(x) - x = -\ln(g(x)) < 0$.

► alors (Γ) est au-dessous de Δ .

4) a) $h(x) = f(x) - g(x)$.

♦ $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{f(x)}_{\searrow -\infty} - \underbrace{g(x)}_{\searrow +\infty} \right) = -\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{f(x)}_{\searrow +\infty} - \underbrace{g(x)}_{\searrow 1} \right) = +\infty$.

4) b)

$\forall x \in]0, +\infty[$, $h(x) = f(x) - g(x)$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $h'(x) = \underbrace{f'(x)}_{>0} - \underbrace{g'(x)}_{>0} > 0$

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		+
h	$-\infty$	$+\infty$

♦ h est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $h(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$

alors l'équation $h(x) = 0$ admet sur $]0, +\infty[$ une solution unique α

d'où l'équation $f(x) = g(x)$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α .

5) Tracer la courbe (Γ) .

6) a) ♦ $e^x + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - e^x + e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

♦ $\int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\alpha} \left(e^x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx = \left[e^x + f(x) \right]_{\ln 2}^{\alpha} = (e^{\alpha} + f(\alpha)) - \left(\frac{e^{\ln 2}}{2} + \underbrace{f(\ln 2)}_0 \right)$.

alors $\int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = e^{\alpha} + f(\alpha) - 2$

6) b) ♦ $I = \int_{\ln 2}^{\alpha} e^x \ln(e^x - 1) dx$. $\begin{cases} u(x) = \ln(e^x - 1) \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left[\ln(e^x - 1) e^x \right]_{\ln 2}^{\alpha} - \int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = \underbrace{\ln(e^{\alpha} - 1)}_{f(\alpha)} e^{\alpha} - \int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = e^{\alpha} f(\alpha) - \int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

6) c) ♦ $I = e^{\alpha} f(\alpha) - \int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx = e^{\alpha} f(\alpha) - (e^{\alpha} + f(\alpha) - 2) = e^{\alpha} f(\alpha) - e^{\alpha} - f(\alpha) + 2$

Comme $f(\alpha) = g(\alpha)$ alors $f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - 1}$ d'où $e^{\alpha} f(\alpha) - f(\alpha) = e^{\alpha}$ donc $e^{\alpha} f(\alpha) = f(\alpha) + e^{\alpha}$

ainsi $I = e^{\alpha} f(\alpha) - e^{\alpha} - f(\alpha) + 2 = f(\alpha) + e^{\alpha} - e^{\alpha} - f(\alpha) + 2 = 2$



Figure 1

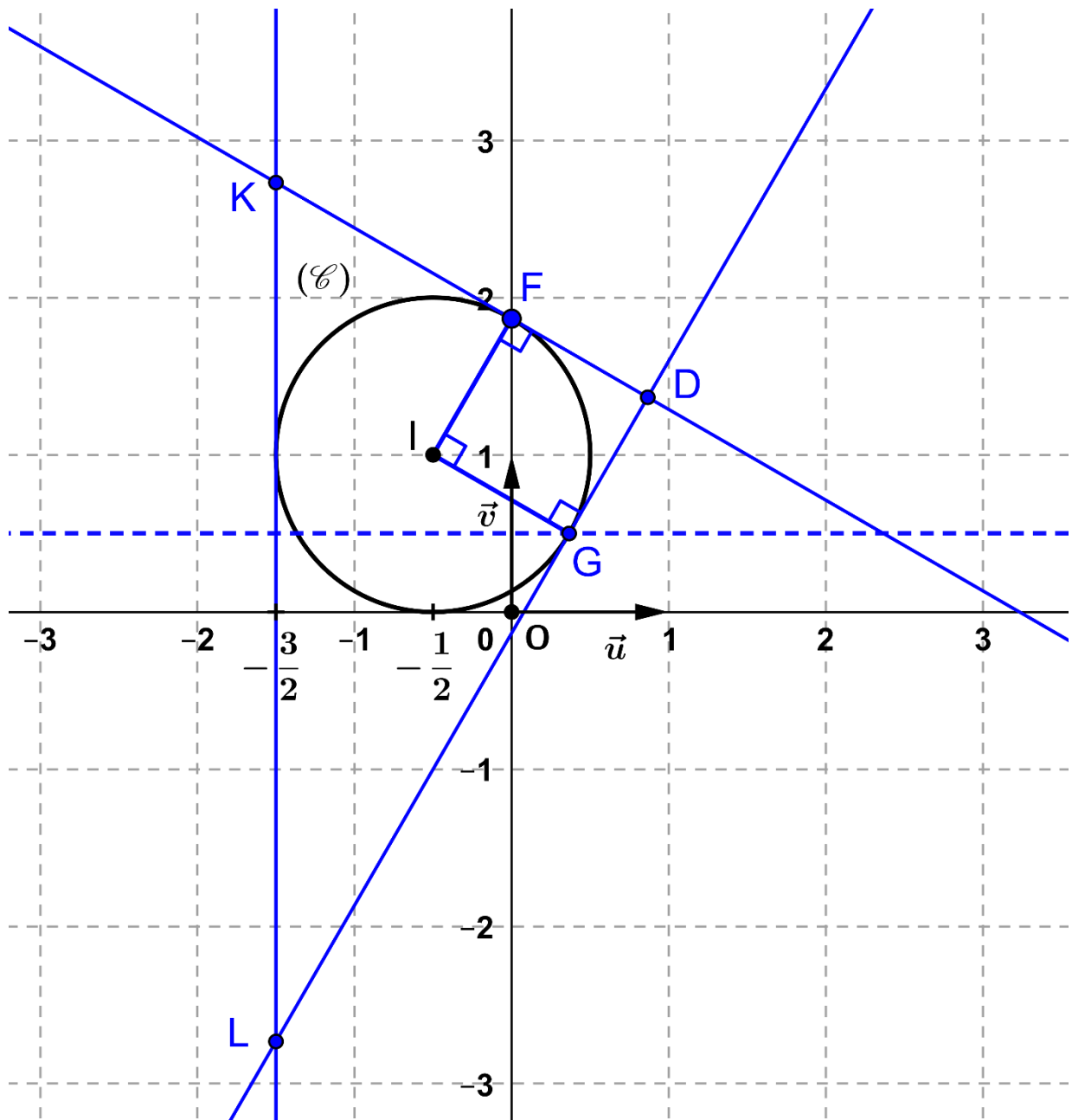


Figure 2

