

MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Techniques
Session principale 2021

Exercice 1 :

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse exacte	c)	a)	c)	b)

Exercice 2 :

- 1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)e^{-2x} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-2x} = +\infty$ donc ζ admet au voisinage de $(-\infty)$
une branche parabolique de direction celle de la droite de ordonnées.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{e^{2x}} = 0$

- 2) a) Pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x + 1) = -4xe^{-2x}$

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	
f	$-\infty$	1	0

- c) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

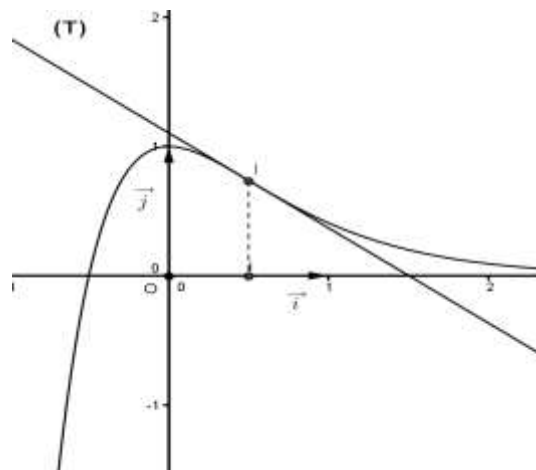
$$f''(x) = -4xe^{-2x} = -4e^{-2x} - 2xe^{-2x} = -2e^{-2x}(2x + 1)$$

La dérivée seconde de f s'annule en $\frac{1}{2}$ et en changeant de signe donc le point

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \text{ c'est-à-dire } I\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right) \text{ est un point d'inflexion de } \zeta.$$

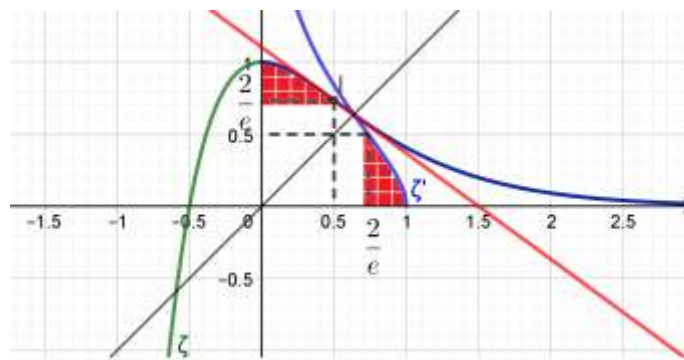
- d) $T: y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ d'où $T: y = -\frac{2}{e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{e}$
par suite $T: y = -\frac{1}{e}2x + 3$

e)



- 3) a) g est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g[0, +\infty[=]0, 1[$.

b)



- 4) a) $F(x) = -x + 1 - e^{-2x}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$F'(x) = -1 + 2x + 1 - e^{-2x} = 2x - e^{-2x} = f(x)$, par suite F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- b) Par raison de symétrie par rapport à la première bissectrice, l'aire de domaine du plan donné est égale à l'aire du domaine limité par : la courbe de g et

les droites d'équations : $x = 0$, $y = 1$ et $y = \frac{2}{e}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\frac{2}{e}}^1 |g(x)| dx = \int_{\frac{2}{e}}^1 g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - \frac{2}{e} \right) dx = \left[F(x) - \frac{2}{e}x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{e} - F(0) = \frac{2e-5}{2e} \text{ u.a} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

$$1) \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Par suite, les points A, B et C déterminent un plan P.

$$2) \quad a) \quad \text{Le vecteur } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \text{ est orthogonal à chacun des vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \\ \text{et comme } \vec{N} = -\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \text{ alors ce vecteur est aussi orthogonal à } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}$$

$$b) \quad \text{D'après la question précédente, } \vec{N} \text{ est un vecteur normal à P, donc} \\ P: 2x - y + 2z + d = 0 \text{ et comme } C(0, 0, 2) \in P \text{ alors } 4 + d = 0 \text{ d'où} \\ P: 2x - y + 2z - 4 = 0.$$

$$3) \quad a) \quad \text{On a : } 2 \times 0 - 0 + 2 \times 1 - 4 = -2 \neq 0 \text{ donc } E(0, 0, 1) \notin P.$$

$$b) \quad \text{On a : } 2 \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + 2 \times \frac{13}{9} - 4 = \frac{36}{9} - 4 = 0 \text{ donc } H\left(\frac{4}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{13}{9}\right) \in P.$$

$$\text{De plus } \overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{-2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \vec{N} \text{ alors } EH \text{ est perpendiculaire au plan P en H,}$$

c'est-à-dire que H est le projeté orthogonal de E sur le plan P.

$$c) \quad \text{Déjà } H \in P.$$

$$\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 0 = 0 \text{ Par suite } \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{4}{9} + 0 + \frac{4}{9} = 0 \text{ Par suite } \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$$

Conclusion : Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

$$4) \quad a) \quad M(x, y, z) \in S \text{ sig } x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \text{ sig } x - 0^2 + y - 0^2 + z - 1^2 = 1 \\ \text{Par suite S est la sphère de centre E et de rayon 1.}$$

b) $d_{E,P} = \frac{|-2|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3} < 1$ donc S et P se coupent suivant un cercle (ζ) de

centre H projeté orthogonal de E sur P et de rayon $\sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $HA = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(0 + \frac{2}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{13}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{81} + \frac{4}{81} + \frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ donc $A \in (\zeta)$

$HC = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(0 + \frac{2}{9}\right)^2 + \left(2 - \frac{13}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{4}{81} + \frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ donc $C \in (\zeta)$

d) Appelons Q le plan médiateur du segment AC .

On a : $HA = HC$ donc $H \in Q$.

A et C sont deux points de $(\zeta) = S \cap P$ donc ces deux points sont sur la sphère S de centre E et par suite $EA = EC$ donc $E \in Q$.

On vérifie aussi que $BA = BC = \sqrt{5}$ donc $B \in Q$.

Comme $E \notin P$ alors B, E et H ne sont pas alignés.

On peut conclure que $Q = EHB$.

Exercice 4 :

I) 1) $1 - i\sqrt{3}^2 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

2) $2z^2 - 4i\sqrt{3}z - 5 + i\sqrt{3} = 0$.

$\Delta' = -12 - 2 \times -5 + i\sqrt{3} = -2 - 2i\sqrt{3} = 1 - i\sqrt{3}^2$.

$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

$S_C = \{z_1, z_2\}$

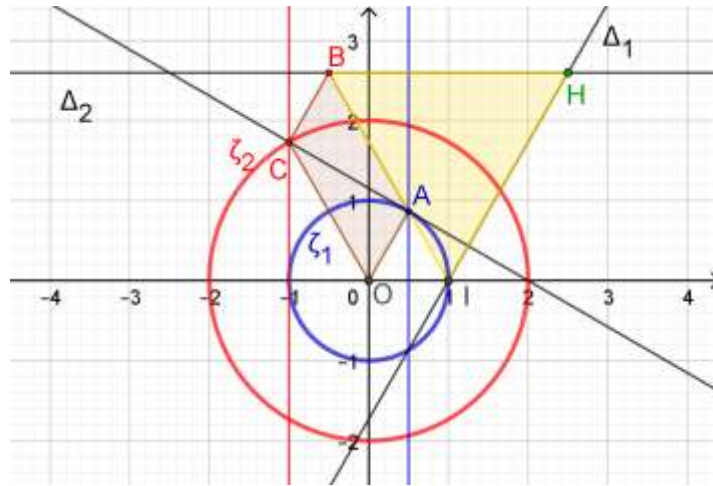
II) 1) $z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2) a) $OA = 1$ donc $A \in \zeta_1$ et $OC = 2$ donc $C \in \zeta_2$.

b) $Z_{\overline{OA}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_{\overline{CB}} = Z_B - Z_C = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2} + 1 - i\sqrt{3} = Z_{\overline{OA}}$

donc le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

c)



$$3) \quad \frac{Z_{\overline{AC}}}{Z_{\overline{OA}}} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 + i\sqrt{3} - 1 = i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}.$$

Donc $AC \perp (OA)$ et comme OA est un rayon du cercle ζ_1 donc AC est tangente à ζ_1 en A .

$$4) \quad a) \quad H \in \Delta_2 \text{ donc } \operatorname{Im} Z_H = \operatorname{Im} Z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et par suite } Z_H = x + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

$$b) \quad Z_{\overline{IH}} = Z_H - 1 = IH \times e^{\arg Z_{\overline{IH}}} = IH \times e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } Z_H - 1 = r \times e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ avec } r = IH$$

$$c) \quad \text{D'après les deux questions précédentes, } x + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = 1 + r\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et par}$$

identification :

$$\begin{cases} r = 3 \\ x = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ d'où } Z_H = \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{2}.$$

Remarque :

On peut trouver les coordonnées de H de la manière suivante :

Δ_1 et (OA) sont perpendiculaires à (AC°) donc elles sont parallèles et par suite

$$\Delta_1 : y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)x + b = \sqrt{3}x + b \text{ et comme } I(1, 0) \in \Delta_1 \text{ alors } \Delta_1 : y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

Δ_2 est la parallèle à la droite réelle passant par le point B et comme $y_B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ alors

$$\Delta_2 : y = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Par suite, } H(x, y) \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \text{ signifie } \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}x = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ soit } H\left(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$5) \text{ On a : } IH = r = 3 ; BH = \left| \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2} \right| = 3$$

$$\text{et } BI = \left| 1 - \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{3 - 3i\sqrt{3}}{2} \right| = 3$$

Donc le triangle BIH est équilatéral.

Autre méthode : On a $IH = BH = 3$

La droite (BH) et l'axe des abscisses sont parallèles coupés par une sécante (IH) déterminent deux angles alternes internes égaux

Comme $BHI = IOA = \frac{\pi}{3}$ d'où le triangle BIH est équilatéral.