

Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session principale

Exercice 1

1)	2)	3)i)	3)ii)
c)	a)	b)	c)

Exercice 2

1) Soit la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) $u_1 = \frac{4 \times 1}{1+1} = 2$ et $u_2 = \frac{4 \times 2}{1+2} = \frac{8}{3}$

b) Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

- Pour $n=0$; $u_0=1$ et $0 < u_0 < 3$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 3$, démontrons que $0 < u_{n+1} < 3$.

On a $u_n > 0$ donc $\frac{4u_n}{1+u_n} > 0$ et par suite $u_{n+1} > 0$.

D'autre part
$$u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n}{1+u_n} - 3 = \frac{4u_n - 3(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{u_n - 3}{1+u_n}.$$

Comme $0 < u_n < 3$ alors $\frac{u_n - 3}{1+u_n} < 0$ et par suite $u_{n+1} < 3$.

D'où $0 < u_{n+1} < 3$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\
 &= \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}} = \frac{4u_n - 3(1+u_n)}{4u_n} \\
 &= \frac{u_n - 3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n
 \end{aligned}$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$b) v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2 \quad \text{et} \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n} = 1 - \frac{3}{u_n} \quad \text{d'où} \quad \frac{3}{u_n} = 1 - v_n \quad \text{et par suite} \quad \frac{u_n}{3} = \frac{1}{1 - v_n} \quad \text{ainsi} \quad u_n = \frac{3}{1 - v_n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{car} \quad 0 < \frac{1}{4} < 1. \quad \text{Donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$3) \quad w_n = \frac{3}{u_n}$$

$$a) 1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 3}{u_n} = \frac{u_n - u_n + 3}{u_n} = \frac{3}{u_n} = w_n$$

$$b) S_n = \sum_{k=0}^{k=n} w_k = \sum_{k=0}^{k=n} (1 - v_k) = n + 1 - \sum_{k=0}^{k=n} v_k$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -2 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{-8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \quad \text{ce qui donne}$$

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{3n} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = 1.$$

Exercice 3 (5 points)

$$1) i e^{\frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{3\pi + \pi}{6}} = e^{i \frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$2) \text{ Soit l'équation} \quad (E) : z^2 - 2(e^{i \frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i \frac{\pi}{6}} = 0.$$

$$\Delta' = \left(e^{i \frac{\pi}{12}}\right)^2 - 1 \times (1-i)e^{i \frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{\pi}{6}} - e^{i \frac{\pi}{6}} + i e^{i \frac{\pi}{6}} = \left(e^{i \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$z' = e^{i \frac{\pi}{12}} - e^{i \frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z'' = e^{i \frac{\pi}{12}} + e^{i \frac{\pi}{3}}$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) $\text{aff}(A) = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\text{aff}(B) = e^{i\frac{\pi}{12}}$. On a $\text{aff}(C) = \text{aff}(A) + \text{aff}(B)$, donc $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ et par suite $OACB$ est un parallélogramme. On a de plus $OA = OB$ donc $OACB$ est un losange.

b)

c) L'aire du losange $OACB = \frac{AB \times OC}{2}$.

$$AB = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = |z'| \quad \text{et} \quad OC = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = |z''| \quad \text{où } z' \text{ et } z'' \text{ sont les solutions de l'équation (E)}$$

$$\text{et on remarque que } z' z'' = p = \frac{c}{a}$$

$$\text{Donc l'aire de } OACB = \frac{|z' z''|}{2} = \frac{|(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}|}{2} = \frac{|(1-i)| |e^{i\frac{\pi}{6}}|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 4

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

$$1) \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + xe^{-x}) = 0.$$

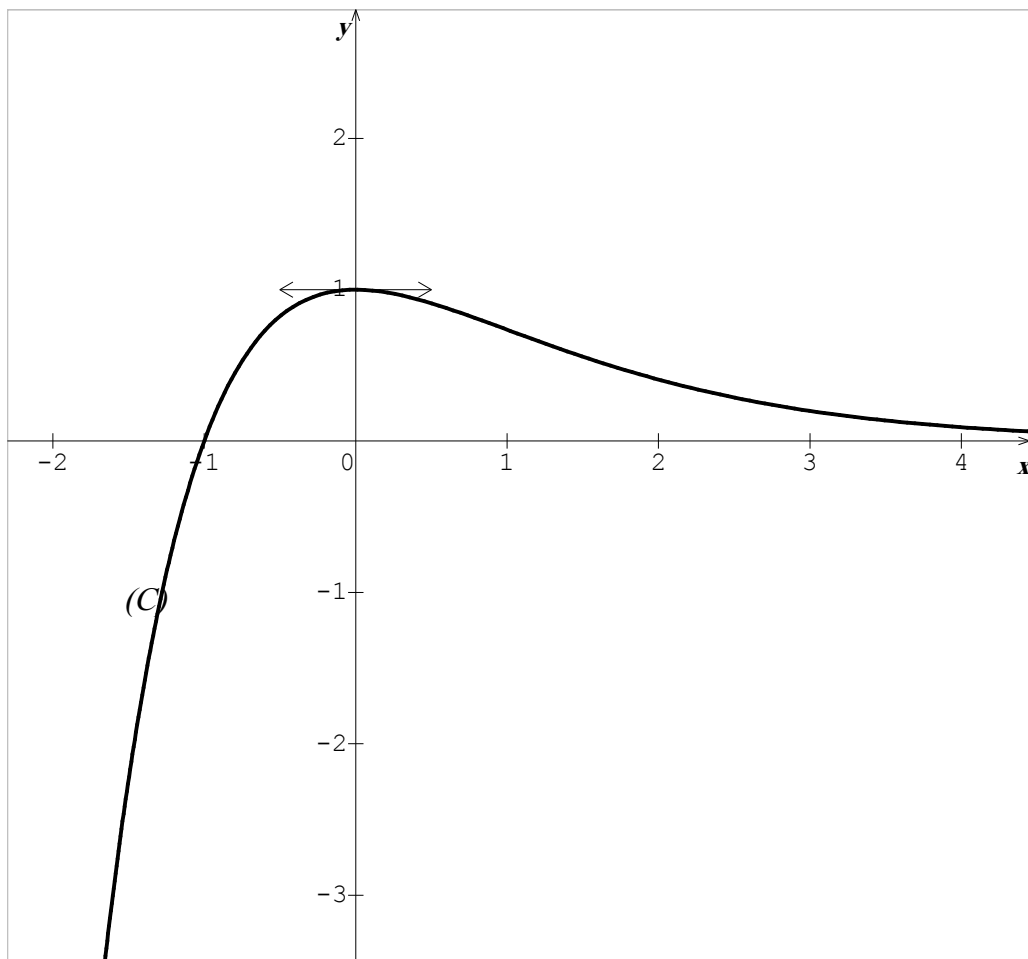
$$b) \quad f'(x) = 1 \times e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x} = -xe^{-x}.$$

c) Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

$$2) \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)}{x} e^{-x} = 1 \times 0 = 0 \quad \text{donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de } -\infty.$$

b) La courbe (C).



3) .

$$a) \quad A_n = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n (1+x)e^{-x} dx$$

Intégration par parties :

$$u(x) = 1+x \quad ; u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad ; v(x) = -e^{-x}$$

$$A_n = \int_0^n (1+x)e^{-x} dx = \left[-(1+x)e^{-x} \right]_0^n + \int_0^n e^{-x} dx = -(1+n)e^{-n} + 1$$

$$b) \quad \text{On a} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+n)e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-n} + ne^{-n}) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -(1+n)e^{-n} + 1 = 1.$$