

Exercice n°1

Question s	La bonne réponse	Justification
1	c	Soit A : « Probabilité que la face « 2 » apparaisse au moins une fois et $\bar{A}$: « Probabilité que la face « 2 » n'apparaisse pas » $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$
2	b	$p(\bar{E} \cap F) = p(\bar{E}/F) \times p(F) = (1 - p(E/F)) \times p(F)$ $= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
3	b	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln e^x}{x} + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} \right) =$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} \right) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} = 0$
4	a	$\int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_{\sqrt{e}}^e$ $= \ln(\ln e) - \ln(\ln \sqrt{e}) = \ln 1 - \ln \frac{1}{2}$ $= 0 - (-\ln 2) = \ln 2$

Exercice n°2

1) a. $(1 - 3i)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i.$

b. (E): $z^2 - (1 + i)z + 2(1 + i) = 0$

$$\Delta = [-(1 + i)]^2 - 4 \times 1 \times 2(1 + i)$$

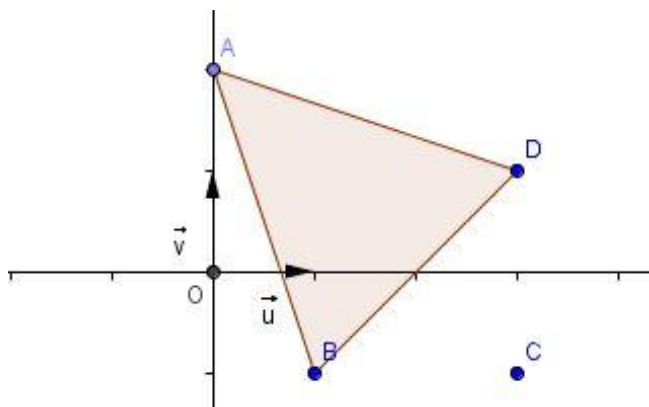
$$\Delta = 2i - 8 - 8i$$

$$\Delta = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$$

$$z' = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i \text{ et } z'' = \frac{1+i+1-3i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{2i; 1 - i\}$.

2) a.



$$b. AB = |z_B - z_A| = |1 - i - 2i| = |1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$AD = |z_D - z_A| = |3 + i - 2i| = |3 - i| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$AB = AD = \sqrt{10} \Rightarrow ABD$ est un triangle isocèle en A.

$$c. CB = |z_B - z_C| = |1 - i - 3 + i| = |-2| = \sqrt{(-2)^2} = 2.$$

$$CD = |z_D - z_C| = |3 + i - 3 + i| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2.$$

$CB = CD$, donc $C \in \text{méd}[BD]$.

$AB = AD$, donc $A \in \text{méd}[BD]$.

Par suite (AC) est la $\text{méd}[BD]$.

Par conséquent les points B et D sont symétriques par rapport à la droite (AC) .

d. Soit $I = B * D$. Comme (AC) est la $\text{méd}[BD]$ alors $[BI]$ est la hauteur du triangle ABC

$$\begin{aligned} \text{Aire de } ABC &= \frac{AC \times BI}{2} = \frac{AC \times \frac{BD}{2}}{2} = \frac{AC \times BD}{4} = \frac{|z_A - z_C| \times |z_D - z_B|}{4} \\ &= \frac{|2i - 3 + i| \times |3 + i - 1 + i|}{4} = \frac{|-3 + 3i| \times |2 + 2i|}{4} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 3^2} \times \sqrt{2^2 + 2^2}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{4} = 3 \end{aligned}$$

$S_{(AC)}(A) = A$, $S_{(AC)}(B) = D$ et $S_{(AC)}(C) = C$ alors $S_{(AC)}(ABC) = ADC$.

Par conséquent l'aire de $ADC = \text{Aire de } ABC$.

Ainsi l'aire de $ABCD = 2 \times \text{Aire de } ABC = 2 \times 3 = 6$.

Exercice n°3

1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} .$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

Par suite A, B et C ne sont pas alignés.

b. le plan P a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \times (-2) - 1 \times (-1) \\ 1 \times (-1) - 2 \times (-2) \\ 2 \times (-1) - (-1) \times (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} .$

Donc $P: 3x + 3y - 3z + d = 0 .$

$A \in P \Rightarrow 3 \times 0 + 3 \times 1 - 3 \times 2 + d = 0 \Rightarrow d = 3 .$

Alors $P: 3x + 3y - 3z + 3 = 0 .$

Ainsi $P: x + y - z + 1 = 0 .$

2. a. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 - 1 - 4 - 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$$

Donc (S) est une sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $= \sqrt{3} .$

b. $d(I, P) = \frac{|1 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R .$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 - 2 \times 0 - 4 \times 1 - 2 \times 2 + 3 = 0$$

$\Rightarrow A \in S, A \in P$ et $d(I, P) = R$ **alors P est tangent à (S) au point A.**

c. Soit V le volume du tétraèdre IABC.

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})|$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} .$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) = 3 \times 1 + 3 \times 1 + (-3) \times (-1) = 9 .$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{6} \times 9 = \frac{3}{2} .$$

3. a.

P est tangent à (S) au point $A \Leftrightarrow (IA) \perp P$.

Comme $P // Q$ alors $(IA) \perp Q$. $H \in Q$ et $H \in [IA]$ donc $IH = d(I, Q)$.

$$H = I * A \Leftrightarrow IH = \frac{IA}{2} \Leftrightarrow d(I, Q) < R$$

$\Rightarrow$ **le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle (C) .**

b. Le cercle (C) a pour centre $H(x, y, z)$ et de rayon r .

le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle (C) de centre H donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{IH} \text{ est normal à } Q(1) \\ H \in Q(2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \overrightarrow{IH}$ et $\vec{n}$ (vecteur normal à Q) sont colinéaires $\Rightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IH} = \alpha \vec{n}$; $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow H \in Q \Rightarrow 1 + \alpha + 2 + \alpha - (1 - \alpha) + 1 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = -1$.

D'où $H(0, 1, 2)$.

$$(C) \text{ a rayon } r = \sqrt{R^2 - (d(I, Q))^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{3}{2}.$$

Par conséquent (C) a pour centre $H(0, 1, 2)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$.

Exercice n°4

1. a. $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

b. **Si $x \in]-\infty; x_0[$, $g(x) < 0$.**

Si $x \in]x_0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Si $x = x_0$, $g(x) = 0$.

2. a. $g(0) = (\alpha \times 0 + \beta)e^0 - 1 = \beta - 1$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $g'(x) = \alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x = (\alpha + \alpha x + \beta)e^x$

$$g'(0) = (\alpha + \alpha \times 0 + \beta)e^0 = \alpha + \beta.$$

$$b. \begin{cases} \beta - 1 = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Donc $g(x) = (1 \times x + (-1))e^x - 1 = (x - 1)e^x - 1$.

3. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{x} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow (O, \vec{i}) : y = 0$ est une asymptote horizontale à (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 1) = 2.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (O, \vec{j}) : x = 0$ est une asymptote verticale à (ζ) à droite et à gauche de 0.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

c. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Alors la courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$.

4. a. $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^* .$

$x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R} .$

$x \mapsto x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^* .$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^* .$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(e^x+1)' \times x - (x)' \times (e^x+1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} .$$

b. Le signe de $f'(x)$ est celui de signe de $g(x)$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
f'(x)	-	-	0	+
f(x)	0	$+\infty$	$f(x_0)$	$+\infty$

c. On a : $\forall x_0 \neq 0, f(x_0) = \frac{e^{x_0}+1}{x_0} .$

On sait que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1}$

Donc $\forall x_0 \neq 0, f(x_0) = \frac{\frac{1}{x_0-1}+1}{x_0} = \frac{1+x_0-1}{x_0(x_0-1)} = \frac{x_0}{x_0(x_0-1)} = \frac{1}{x_0-1} .$

d. Traçage de la courbe (ζ) :

Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75	1	1,2	1,5	1,75	2	3
$f(x)$	-0,2	-0,25	-0,3	-0,6	-1,4	-2	-3,2	-7,1	9,1	5,3	4,2	3,7	3,6	3,7	3,9	4,2	7

Courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

