

EXERCICE 1 (QCM)

Questions	Bonne réponse
1	c
2	c
3	c
4	a

EXERCICE 2

$A(1,0,-1), B(1,3,5), C(-7,2,2)$ et $H(-1,4,3)$

$$1/a/ \overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 3-4 \\ 5-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -7-(-1) \\ 2-4 \\ 2-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -1 \times (-1) - 2 \times (-2) \\ -[2 \times (-1) - 2 \times (-6)] \\ 2 \times (-2) - (-1) \times (-6) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

b/ $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$ est un vecteur normal du plan (HBC) alors (HBC) a pour équation :

$$5x - 10y - 10z + d = 0. H \in (HBC) \Rightarrow 5 \times (-1) - 10 \times 4 - 10 \times 3 + d = 0 \Rightarrow d = 75.$$

$$\text{Donc } (HBC) : 5x - 10y - 10z + 75 = 0 \Rightarrow (HBC) : x - 2y - 2z + 15 = 0.$$

c/ Pour montrer que H est le projeté orthogonal de A sur (HBC) , il suffit de montrer que

$$d(A, (HBC)) = AH.$$

$$d(A, (HBC)) = \frac{|1 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 15|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|18|}{3} = 6$$

$$AH = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Par conséquent $d(A, (HBC)) = HA$, on conclut que H est le projeté orthogonal de A sur (HBC) .

$$2/ a/ S = \{M(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0\}$$

$$M \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + (z^2 - 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 - 4 + (z-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2^2$$

Donc S est une sphère de centre $I(0, 2, 1)$ et de rayon $R = 2$.

b/ Soit $I' = A * H$. Montrons que $I' = I$.

$$I' \left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) \Rightarrow I'(0, 2, 1)$$

Par conséquent $I' = I$, par suite I est le milieu du segment $[AH]$.

$$c/ d(I, (HBC)) = \frac{|0 \times 1 + 2 \times (-2) + 1 \times (-2) + 15|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$d(I, (HBC)) > R \text{ alors } S \cap (HBC) = \emptyset.$$

$$3/ J(0,0,1)$$

$$a/ 0^2 + 0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 = 1 - 2 \times 1 = 0 \Rightarrow j \in S$$

$$b/ d(I, (AJ)) = \frac{\|\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AJ}\|}{\|\overrightarrow{AJ}\|}.$$

$$\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. d(I, (AJ)) = \frac{\sqrt{4^2 + 0^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2.$$

$$c/ d(I, (AJ)) = R. \text{ Comme } R \text{ est le rayon de la sphère de centre } I \text{ alors } (AI) \text{ est tangente à } S \text{ en } J.$$

$$d/ \text{ Soit } M(x, y, z) \in (AJ) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AJ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \alpha \times 1 \\ y-0 = \alpha \times 0 \\ z-(-1) = \alpha \times (-2) \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$* \text{ Soit } \{N(x, y, z)\} = (AJ) \cap (HBC) \Rightarrow N \in (AJ) \text{ et } N \in (HBC).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2\alpha \\ x - 2y - 2z + 15 = 0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2\alpha \\ \alpha + 1 - 2 \times 0 - 2(-1 - 2\alpha) + 15 = 0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2\alpha \\ 5\alpha + 12 = 0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2\alpha \\ \alpha = -\frac{12}{5} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{12}{5} + 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2 \times -\frac{12}{5} \\ \alpha = -\frac{12}{5} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = 0 \\ z = -1 + \frac{24}{5} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = 0 \\ z = \frac{19}{5} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Donc } N\left(-\frac{7}{5}, 0, \frac{19}{5}\right).$$

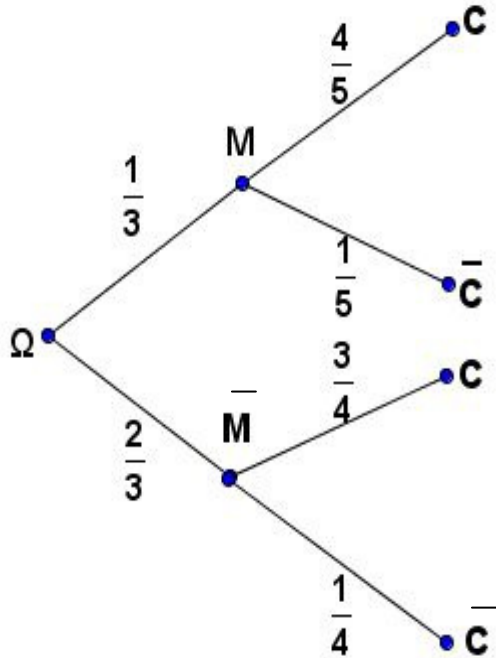
EXERCICE 3

M : « l'employé choisit la modalité m »

C : « l'employé est atteint d'une maladie chronique »

1/ a/ $p(M) = \frac{1}{3}$, $p(C/M) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ et $p(C/\bar{M}) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

b/



2/ a/ $p(M \cap C) = p(C/M) \times p(M)$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{15}$$

b/ $p(\bar{M} \cap C) = p(C/\bar{M}) \times p(\bar{M})$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c/ $C = (C \cap M) \cup (C \cap \bar{M})$

$$p(C) = p(C \cap M) + p(C \cap \bar{M})$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8}{30} + \frac{15}{30}$$

$$= \frac{23}{30}$$

$$3/ p(M/C) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{23}{30}} = \frac{4}{15} \times \frac{30}{23} = \frac{8}{23}$$

EXERCICE 4

1/a/ La restriction g de f à $[0; +\infty[$ est continue et strictement décroissante alors g est strictement monotone donc g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $g([0; +\infty[) =]-\infty, 2]$.

b/ f est strictement monotone sur $[0; +\infty[$. $0 \in]-\infty, 2]$ alors $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α .

c/ $f(1) = 1$ et $f(1,5) \approx -1,038$; $f(1) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 1,5$.

$$2/a/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x - xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\xrightarrow{0} \\ 0}} + \underbrace{e^x}_{+\infty} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}_{\substack{\xrightarrow{0} \\ -1}} = -\infty.$$

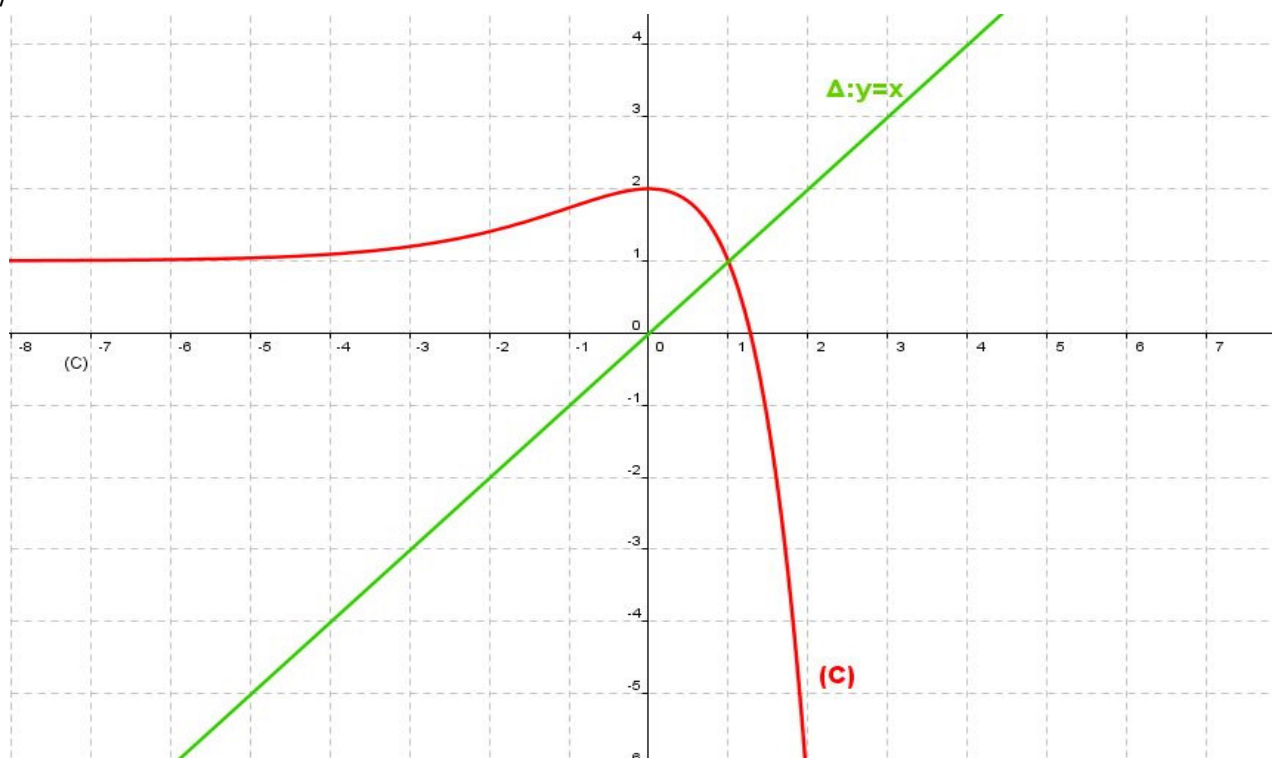
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, alors (ζ) admet une branche parabolique de direction $(0, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} b/ f(x) - y &= f(x) - x = 1 + e^x - xe^x - x \\ &= 1 + e^x - x(1 + e^x) \\ &= (1 + e^x)(1 - x) \end{aligned}$$

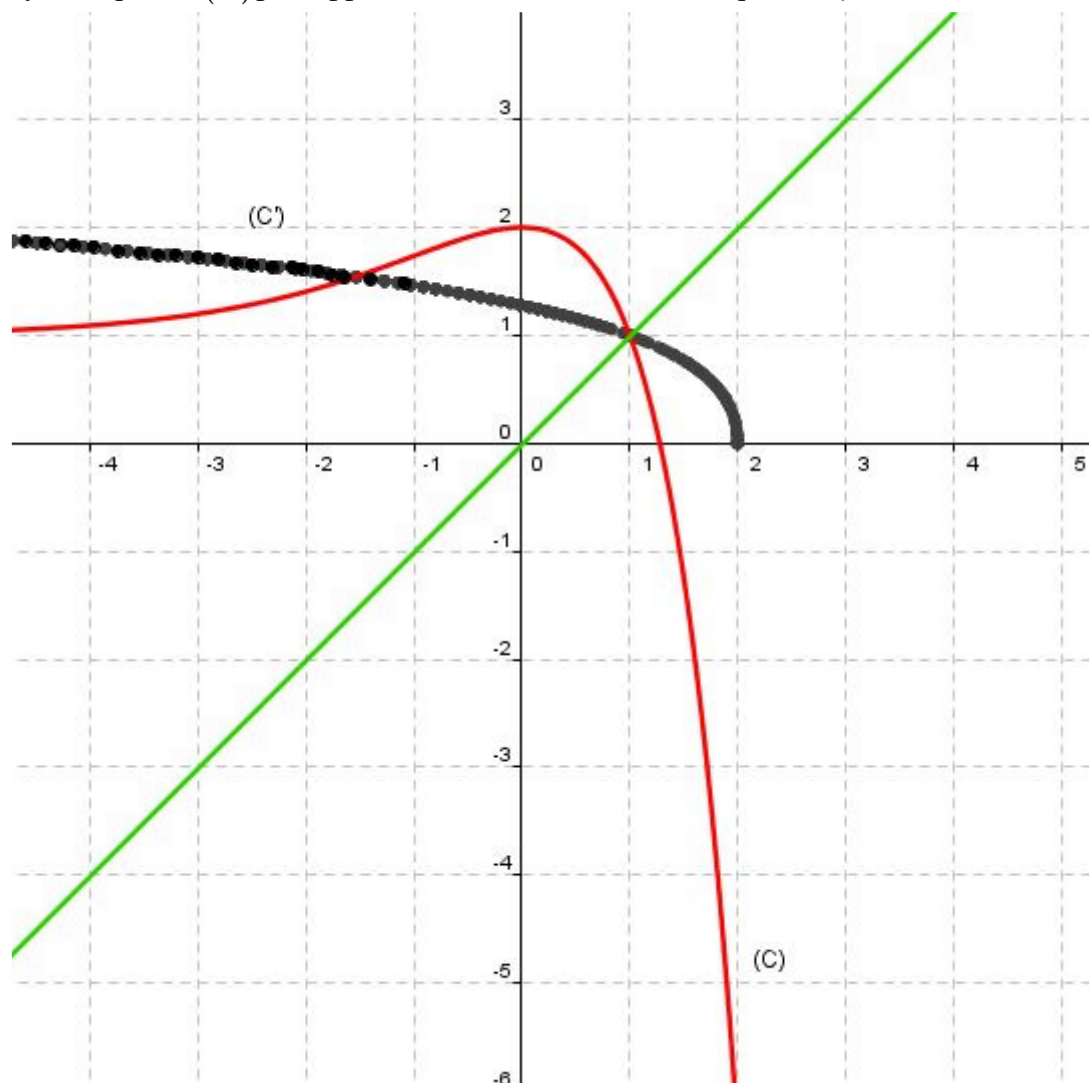
Le signe de $f(x) - x$ est celui de $1 - x$ car $1 + e^x > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)-x		○	
	+		-
Position de (C) et Δ	(C) est au dessus de Δ		(C) est au dessous de Δ
	(C) ∩ Δ = {A < 1, 1 >}		

c/



3/ Comme g est une bijection alors g admet une fonction réciproque g^{-1} , sa courbe représentative (C') est symétrique de (C) par rapport à la 1^{ère} bissectrice Δ d'équation $y = x$.



4/ a/ $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $x \mapsto -2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 } alors $x \mapsto 2 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto (2 - x)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où $F(x) = x + (2 - x)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = 1 + (-1)e^x + (2 - x)e^x = 1 - e^x + 2e^x - xe^x = 1 + e^x - xe^x = f(x)$$

Par conséquent F admet une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\text{b/ } A = \int_0^1 |f(x) - x| dx \text{ ua.}$$

Sur $]-\infty, 1], (C)$ est au dessus de $\Delta \Rightarrow f(x) - x \geq 0 \forall x \in [0, 1]$.

$$A = \int_0^1 (f(x) - x) dx \text{ ua} = \left(\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx \right) \text{ ua} = \left([F(x)]_0^1 - \frac{1}{2} [x^2]_0^1 \right) \text{ ua}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } &= \left(F(1) - F(0) - \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) \right) \text{ ua} = \left((1 + (2 - 1)e^1) - (0 + (2 - 0)e^0) - \frac{1}{2} \right) \text{ ua} = \left(1 + e - 2 - \frac{1}{2} \right) \text{ ua} \\ &= \left(e - \frac{3}{2} \right) \text{ ua} \end{aligned}$$

c/ Soit A' : l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$$A' = \int_1^2 g^{-1}(x) dx \text{ ua} \text{ alors } A' = \int_1^2 g^{-1}(x) dx \text{ ua} = \int_0^1 f(x) dx \text{ ua}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x dx \text{ ua} + \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = A - \int_0^1 x dx \text{ ua} \Rightarrow \int_1^2 g^{-1}(x) dx \text{ ua} = A - \int_0^1 x dx \text{ ua} \\ &\Rightarrow \int_1^2 g^{-1}(x) dx \text{ ua} = \left(e - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [x^2]_0^1 \right) \text{ ua} \\ &\Rightarrow \int_1^2 g^{-1}(x) dx \text{ ua} = \left(e - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ ua} \\ &\Rightarrow \int_1^2 g^{-1}(x) dx = e - 2 \end{aligned}$$