

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
SESSION PRINCIPALE – JUIN 2008

Exercice 1 (Q.C.M)

❖ **Contenus :**

- Nombres complexes.

❖ **Aptitudes visées :**

- Calculer ou transformer des expressions complexes.
- Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul.

❖ **Corrigé :**

- 1) b)
- 2) a)
- 3) b)

Exercice 2

❖ **Contenus :**

- Vecteurs de l'espace.
- Produit scalaire dans l'espace.
- Produit vectoriel dans l'espace, propriétés, distance d'un point à une droite, distance de deux droites, calcul de volumes.

❖ **Aptitudes visées :**

- Exploiter les opérations sur les vecteurs de l'espace.
- Exploiter le produit scalaire dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Exploiter les propriétés du produit vectoriel dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.

❖ **Corrigé :**

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -9 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{9\sqrt{6}}{2}$.

3) $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est perpendiculaire au plan (ABC).

4) a) $\text{Volume}(\text{ABCD}) = \frac{1}{6} \|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{6} (9\sqrt{6})(3\sqrt{6}) = 27$.

b) $\text{Aire}(\text{BCD}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| = 27$.

c) On note $\Delta(\text{BCD})$ l'aire du triangle BCD et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

$$\text{Volume}(\text{ABCD}) = \frac{AH \times \Delta(\text{BCD})}{3} = \frac{27 \times AH}{3} = 9 \times AH.$$

$$\text{D'où } AH = \frac{\text{Volume}(\text{ABCD})}{9} = 3.$$

5) **Exercice 3**

❖ **Contenus :**

- Fonction exponentielle.
- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a,b] .

❖ **Aptitudes visées :**

- Reconnaître qu'une droite est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction du programme.
- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Exploiter ou créer une représentation graphique pour déterminer ou estimer les solutions éventuelles d'une équation ou d'une inéquation.
- Reconnaître si une fonction du programme est dérivable en un point ou sur un intervalle.
- Déterminer la dérivée d'une fonction du programme sur un intervalle en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées de fonctions usuelles.
- Calculer une intégrale à l'aide d'intégration par parties.

- Reconnaître qu'une fonction est la primitive d'une fonction continue sur un intervalle I, qui s'annule en un réel a de I.
- Calculer une intégrale en utilisant une primitive.
- Calculer une aire plane.

❖ **Corrigé :**

I)

- 1) Comme la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Comme la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O; \vec{j})$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

- 2) Si $m < 0$ alors l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solutions.
 Si $m = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution égale à 0.
 Si $0 < m < 4e^{-2}$ alors l'équation $f(x) = m$ admet 3 solutions distinctes.
 Si $m = 4e^{-2}$ alors l'équation $f(x) = m$ admet 2 de solutions distinctes.
 Si $m > 4e^{-2}$ alors l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution.

II)

- 1) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 2xe^{-x} - f(x).$
- 2) a) $I = \int_0^2 xe^{-x} dx$. On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$.
 D'où $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.
 Donc $I = [-xe^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^2 = 1 - 3e^{-2}.$
- b) $J = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2xe^{-x} - f'(x)) dx = 2I - \int_0^2 f'(x) dx.$
- c) $J = 2I - [f(x)]_0^2 = 2(1 - 3e^{-2}) - f(2) = 2 - 10e^{-2}.$

Exercice 4

❖ **Contenus :**

- Probabilité conditionnelle.
- Formule des probabilités totales.

❖ **Aptitudes visées :**

- Calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est réalisé.
- Calculer la probabilité d'un événement en utilisant la formule de BAYES et/ou la formule des probabilités totales.

❖ **Corrigé :**

$$1) \quad P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$2) \quad a) \quad P(A|E) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}.$$

$$P(A|\overline{E}) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

$$b) \quad P(A) = P(A|E) \times P(E) + P(A|\overline{E}) \times P(\overline{E}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

$$c) \quad P(D|E) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} \text{ et } P(D|\overline{E}) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

$$\text{D'où } P(D) = P(D|E) \times P(E) + P(D|\overline{E}) \times P(\overline{E}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{30}.$$