

EXAMEN DU BACCALAURÉAT
SESSION DE CONTRÔLE 2026

CORRIGÉ

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
DURÉE : 3 H – COEF. 3

EXERCICE 1 (5 points)

PARTIE I

①

$$(3\sqrt{3} - 3i)^2 = (3\sqrt{3})^2 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 3i + (3i)^2$$

Sachant que $(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$ et $(3i)^2 = 9i^2 = -9$, on a :

$$(3\sqrt{3} - 3i)^2 = 27 - 18i\sqrt{3} - 9 = 18 - 18i\sqrt{3}$$

②

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-3(\sqrt{3} + 3i)]^2 - 4 \times 2 \times (-9 + 9i\sqrt{3})$$

$$\Delta = 9(3 + 6i\sqrt{3} - 9) - 8(-9 + 9i\sqrt{3})$$

$$\Delta = 9(-6 + 6i\sqrt{3}) + 72 - 72i\sqrt{3}$$

$$\Delta = -54 + 54i\sqrt{3} + 72 - 72i\sqrt{3} = 18 - 18i\sqrt{3}$$

D'après la question précédente, on remarque que $\Delta = (3\sqrt{3} - 3i)^2$. On peut donc choisir comme racine carrée de Δ le nombre $\delta = 3\sqrt{3} - 3i$.

Les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{3(\sqrt{3} + 3i) - (3\sqrt{3} - 3i)}{4} = \frac{3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} + 3i}{4} = \frac{12i}{4} = 3i$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{3(\sqrt{3} + 3i) + (3\sqrt{3} - 3i)}{4} = \frac{3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3} - 3i}{4} = \frac{6\sqrt{3} + 6i}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

L'ensemble des solutions est donc : $S = \left\{ 3i ; \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$.



PARTIE II

- ① a) Calculons le module de z_B (la distance OB) :

$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

Puisque $OB = 3$, le point B appartient bien au cercle Γ de centre O et de rayon 3.

- b) On a $z_B = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $z_B = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

- c) Voir figure

- ② a)

$$z_E = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + 3i$$

La partie imaginaire de z_E est $\text{Im}(z_E) = 3$. La droite D ayant pour équation $y = 3$, le point E appartient donc à la droite D.

- b) Voir figure

- ③ a) Calculons d'une part $z_E - z_B$:

$$z_E - z_B = (\sqrt{3} + 3i) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Calculons d'autre part $i\frac{\sqrt{3}}{3}z_B$:

$$i\frac{\sqrt{3}}{3}z_B = i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = i\frac{3}{2} + i^2\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les deux expressions sont égales, d'où $z_E - z_B = i\frac{\sqrt{3}}{3}z_B$.

- b) À partir de l'égalité précédente, puisque $z_B = z_B - z_O$, on peut écrire :

$$\frac{z_E - z_B}{z_B - z_O} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{z_E - z_B}{z_B - z_O} &= i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{z_{BE}}{z_{OB}} = i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{z_{BE}}{z_{OB}} \in i\mathbb{R} \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{OB} \text{ sont orthogonaux}) \end{aligned}$$

Ainsi, les droites (BE) et (OB) sont perpendiculaires.



- ④ (a) Comme (BE) et (OB) sont perpendiculaires alors (OB) et (EF) sont perpendiculaires d'où (OB) porte la hauteur issue de O dans le triangle OEF.
 D'autre part D est perpendiculaire à la droite des ordonnées, de plus $E \in D$, $H \in D$ et F est un point de la droite des ordonnées d'où (EH) et (OF) sont perpendiculaires par suite (EH) porte la hauteur issue de E dans le triangle OEF.
 Et comme H est le point d'intersection des deux droites (OB) et (EH) il s'ensuit que H est l'orthocentre du triangle OEF.
- (b) Le point H est défini comme l'intersection de (OB) et de la droite D. Comme tous les points de la droite D ont pour ordonnée 3, le point H qui appartient à D a nécessairement une ordonnée égale à 3. Donc $y = 3$.
- (c) On a $z_H = x + 3i$ et $z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

$$\frac{z_H}{z_B} = \frac{x + 3i}{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i} = \frac{2(x + 3i)}{3\sqrt{3} + 3i} = \frac{2(x + 3i)(3\sqrt{3} - 3i)}{(3\sqrt{3})^2 - (3i)^2}$$

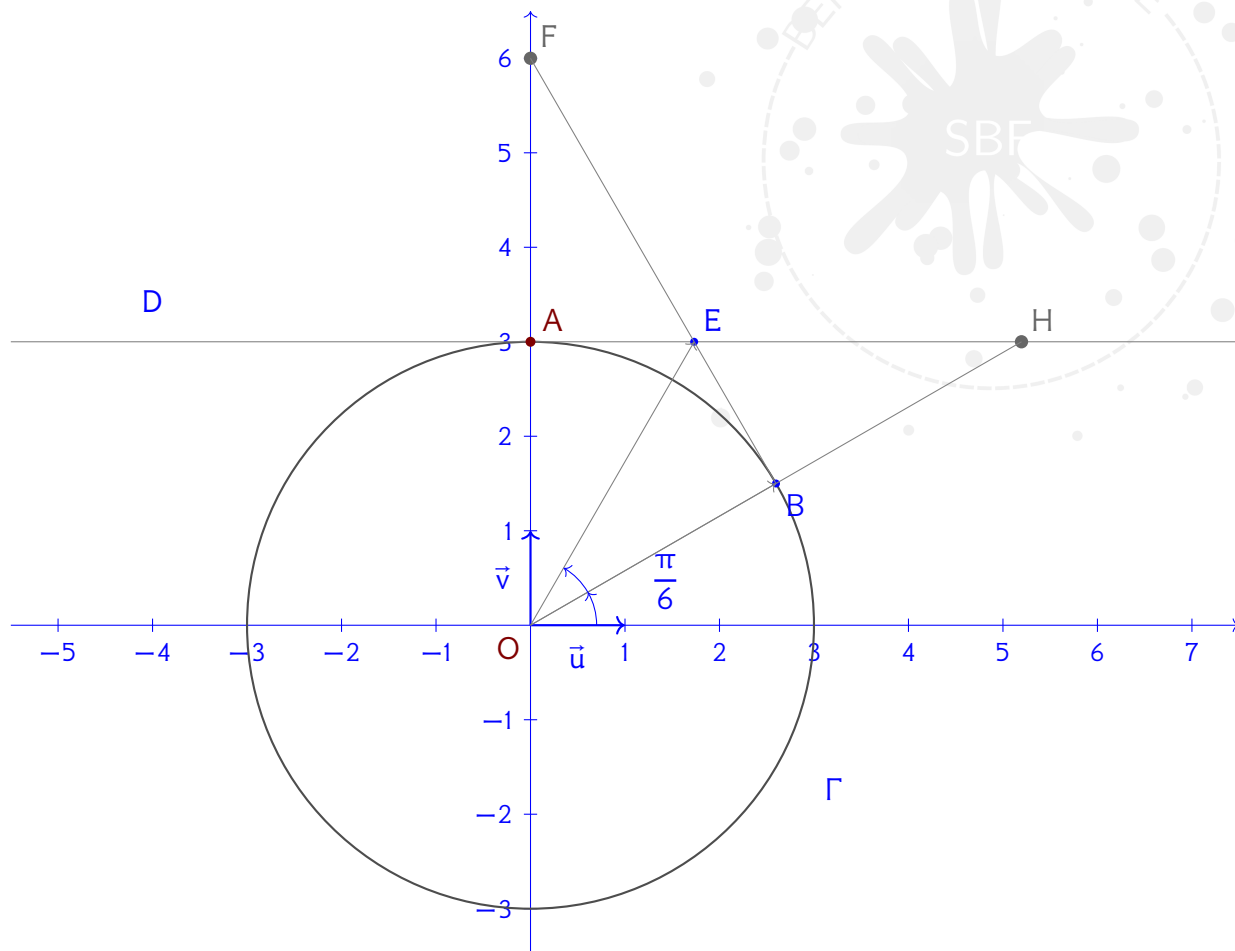
$$\frac{z_H}{z_B} = \frac{2(3x\sqrt{3} - 3xi + 9i\sqrt{3} + 9)}{27 + 9} = \frac{6(x\sqrt{3} - xi + 3i\sqrt{3} + 3)}{36}$$

$$\frac{z_H}{z_B} = \frac{(3 + x\sqrt{3}) + i(3\sqrt{3} - x)}{6} = \frac{3 + x\sqrt{3}}{6} + i\frac{3\sqrt{3} - x}{6}$$

- (d) Puisque H appartient à la droite (OB), les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, ce qui signifie que le rapport $\frac{z_H}{z_B}$ doit être un nombre réel. Sa partie imaginaire est donc nulle :

$$\frac{3\sqrt{3} - x}{6} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{3} - x = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$

L'affixe du point H est donc : $z_H = 3\sqrt{3} + 3i$.



a) On a :

d'où :

b) Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont pas alignés.

- (a) On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d' où :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- ⑥ Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés et déterminent un unique plan P.

Le vecteur $-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

L'équation du plan P est donc de la forme :

$$P : x + y + z + \delta = 0$$

Comme le point $A(1,1,0) \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation :

$$1 + 1 + 0 + \delta = 0 \Leftrightarrow \delta = -2$$

D'où l'équation cartésienne du plan P :

$$P : x + y + z - 2 = 0$$

- ② a) Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal au plan Q est $\vec{n}_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{n}_P = \vec{n}_Q$, les plans P et Q sont parallèles ($P \parallel Q$).

De plus, vérifions si les plans sont strictement parallèles : Le point $A(1,1,0)$ appartient à P. Testons s'il appartient à Q dont l'équation est $x + y + z + 1 = 0$:

$$1 + 1 + 0 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow A \notin Q$$

Les plans P et Q sont donc strictement parallèles.

Autrement : On remarque que les coefficients des variables sont identiques mais les constantes sont différentes ($\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$), ce qui prouve directement que P et Q sont strictement parallèles.

- b) Le volume V du tétraèdre ABCI est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AI}|$$

Soit $I(x,y,z)$, on a $\vec{AI} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$. Alors :

$$V = \frac{1}{6} |-4(x-1) - 4(y-1) - 4z|$$

$$V = \frac{1}{6} |-4x + 4 - 4y + 4 - 4z| = \frac{1}{6} |-4x - 4y - 4z + 8|$$

$$V = \frac{4}{6} |x + y + z - 2| = \frac{2}{3} |x + y + z - 2|$$

Or, le point $I(x,y,z)$ appartient au plan Q, donc $x + y + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = -1$.
En substituant cette valeur, on obtient :

$$V = \frac{2}{3} |-1 - 2| = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

- ③ a)

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1) \times (-2) + 0 \times 4 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$$

Comme $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux ($\vec{AB} \perp \vec{AC}$).
Le triangle ABC est donc rectangle en A.



- ⑥ Soit H le milieu de $[BC]$. Les coordonnées de H sont données par $H = \frac{B+C}{2}$, ce qui donne $H\left(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$.

Pour le paramètre $\alpha = 0$ dans la représentation de la droite D , on retrouve :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H \in D$$

Le vecteur directeur de la droite D est $\vec{u}_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On constate que $\vec{u}_D = \vec{n}_P$, ce qui

implique que la droite D est perpendiculaire au plan P ($D \perp P$).

De plus, $H \in (BC)$ et comme la droite (BC) est incluse dans le plan P ($(BC) \subset P$), on a $H \in P$.

Par conséquent, la droite D est perpendiculaire au plan P au point H .

- ④ ① La sphère S_α a pour centre $\Omega\left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + 2, \alpha - \frac{1}{2}\right)$ et passe par B . Le rayon R est la distance ΩB :

$$R = \Omega B = \sqrt{\left(\alpha - \frac{1}{2} - x_B\right)^2 + (\alpha + 2 - y_B)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2} - z_B\right)^2}$$

D'après les calculs intermédiaires :

$$R = \sqrt{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha + 2)^2 + \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$R = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} + \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \alpha^2 - 3\alpha + \frac{9}{4}}$$

$$R = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{13}{2}}$$

- ⑥ Par des calculs similaires, on montre que $C\Omega = \dots = R$, ce qui prouve que le point C appartient également à la sphère S_α ($C \in S_\alpha$).

- ⑦ Comme $B \neq C$ et que les deux points appartiennent à l'intersection $S_\alpha \cap P$, le plan P coupe la sphère S_α selon un cercle Γ .

Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal du centre Ω de la sphère sur le plan P . Or, nous avons démontré à la question 3.b) que la droite D (qui passe par Ω) est perpendiculaire au plan P au point H . Le centre de ce cercle est donc le point H .

Le rayon de ce cercle Γ est égal à la distance HB (ou HC) :

$$HB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$



- ④ La sphère S_α est tangente au plan Q si et seulement si la distance de son centre Ω au plan Q est égale à son rayon R :

$$d(\Omega, Q) = R$$

$$\frac{\left| \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + (\alpha + 2) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{13}{2}}$$

$$\frac{|3\alpha + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{13}{2}}$$

En élevant les deux membres au carré :

$$\frac{(3\alpha + 3)^2}{3} = 3\alpha^2 + \frac{13}{2}$$

$$3(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 3\alpha^2 + \frac{13}{2}$$

$$3\alpha^2 + 6\alpha + 3 = 3\alpha^2 + \frac{13}{2}$$

$$6\alpha = \frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}$$

$$\alpha = \frac{7}{12}$$

EXERCICE 3 (3 points)

- ① X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,15$. On a donc :

$$P(X \geq 3) = e^{-0,15 \times 3} = e^{-0,45} \approx 0,638$$

②

$$P(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,15t} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5 = e^{-0,15t}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,5) = -0,15t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,15} \approx 4,620 \dots$$

Interprétons ce résultat en années et mois :

$$t = 4 \text{ ans et } 0,620 \times 12 \text{ mois} \approx 4 \text{ ans et } 7,44 \text{ mois}$$

D'où, en arrondissant :

$$t \approx 4 \text{ ans et } 7 \text{ mois}$$

- ③ Par la propriété de durée de vie sans vieillissement de la loi exponentielle, on a :

$$P(X \geq 6 \mid X \geq 3) = P(X \geq 3 + 3 \mid X \geq 3)$$

$$= P(X \geq 3) \approx 0,638$$



- ④ Soit Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de téléviseurs qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années parmi les 5 choisis.

Chaque choix de téléviseur est une épreuve de Bernoulli à deux issues :

- Succès : « Le téléviseur n'a pas de panne pendant les 3 premières années », de probabilité $p = P(X \geq 3) = 0,638$.
- Échec : de probabilité $q = 1 - p = 0,362$.

On répète 5 fois cette épreuve de manière identique et indépendante. Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,638$, notée $B(5 ; 0,638)$.

Calculons la probabilité qu'au moins un des téléviseurs n'ait pas de panne :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - C_5^0 \times (0,638)^0 \times (0,362)^5 \\ &= 1 - (0,362)^5 \approx 1 - 0,0062 \approx 0,994 \end{aligned}$$

EXERCICE 4 (7 points)

① a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - xe^x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x) = 0$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = -xe^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-

Position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$:

- Sur $] -\infty, 0[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.
- $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{D} = \{(0, 0)\}$.
- Sur $]0, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{D}$.

② a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - (e^x + xe^x) = 1 - e^x - xe^x = -(xe^x + e^x - 1)$$

b) $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

c) Tableau de signes détaillé pour $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
xe^x	-	0	+
$xe^x + e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-

D'où $f'(x)$ et x sont de signes contraires.



④ Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	0	$-\infty$

Calcul de la limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - xe^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^x) = -\infty$$

③ (a) Équation de la tangente T en $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} T : y &= f'(-1)(x + 1) + f(-1) \\ &= -(-1e^{-1} + e^{-1} - 1)(x + 1) + (-1 - (-1)e^{-1}) \\ &= -\left(-\frac{1}{e} + \frac{1}{e} - 1\right)(x + 1) - 1 + \frac{1}{e} \\ &= (x + 1) - 1 + \frac{1}{e} = x + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(b) T et D ont le même coefficient directeur ($m = 1$), donc $T \parallel D$.

(c) Soit $g(x) = f(x) - \left(x + \frac{1}{e}\right)$. On a $g(-1) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq g(-1) \Rightarrow g(x) \leq 0$ donc $f(x) - \left(x + \frac{1}{e}\right) \leq 0$.

D'où C_f est en dessous de T .

④ (a) Voir figure

(b) Calcul de l'aire A :

$$A = \int_0^{\ln 2} |f(x) - x| dx$$

Or, pour tout $x \in [0, \ln 2]$, $f(x) \leq x$, donc :

$$A = \int_0^{\ln 2} (x - f(x)) dx = \int_0^{\ln 2} xe^x dx$$

En utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(x) &= x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) &= e^x \Leftarrow v(x) = e^x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A &= \left[x e^x \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx \\
 &= 2 \ln 2 - [e^x]_0^{\ln 2} \\
 &= 2 \ln 2 - (2 - 1) \\
 &= 2 \ln 2 - 1
 \end{aligned}$$

- ⑤ (a) • Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = -1 \leq 0$, vrai.
 • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leq 0$. Montrons que $u_{n+1} \leq 0$.
 On sait que $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$.
 Comme $u_n \leq 0$ et $e^{u_n} > 0$, alors $u_n e^{u_n} \leq 0$, d'où $u_{n+1} \leq 0$.
 Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{u_n} - u_n = u_n (e^{u_n} - 1)$$

Comme $u_n \leq 0 \Rightarrow e^{u_n} \leq 1 \Rightarrow e^{u_n} - 1 \leq 0$.

Par produit de deux termes négatifs, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

(Autre méthode : $u_{n+1} - u_n = -f(u_n) \geq 0$)

- (c) (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle est convergente vers une limite $\ell \in]-\infty, 0]$.

On a $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = x e^x$.

g est continue sur $]-\infty, 0]$, donc :

$$\begin{aligned}
 g(\ell) &= \ell \Leftrightarrow \ell - g(\ell) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \ell - \ell e^\ell = 0 \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \ell = 0
 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- ⑥ (a) $u_n - u_{n+1} = u_n - u_n e^{u_n} = f(u_n)$

- (b) Soit $S_n = \sum_{k=0}^n f(u_k) = f(u_0) + f(u_1) + \dots + f(u_n)$.

En remplaçant par l'expression télescopique :

$$\begin{aligned}
 S_n &= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n+1}) \\
 &= u_0 - u_{n+1} \\
 &= -1 - u_{n+1}
 \end{aligned}$$

- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 - u_{n+1}) = -1$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$)



FIGURE

