

Exercice N°1: (4 points).		
Question	Corrigé	Barème
1)	(E): $\frac{1}{2}z^2 - e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{1}{2}(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1) = 0$ a) On a : $a = \frac{1}{2}$, $b = -e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $c = \frac{1}{2}(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1)$ $\Delta = b^2 - 4ac = e^{i\frac{\pi}{3}} - (e^{i\frac{\pi}{3}} + 1) = -1 = i^2$	
	b) Soit $\delta = i$ une racine carrée de Δ Soient $z' = \frac{-b+\delta}{2a} = e^{i\frac{\pi}{6}} + i$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = e^{i\frac{\pi}{6}} - i$ $S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\frac{\pi}{6}} + i, e^{i\frac{\pi}{6}} - i\}$	
2)	a) On a : $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} + i$, $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}} - i$ et $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\frac{z_A+z_B}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+i+e^{i\frac{\pi}{6}}-i}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}} = z_I$ d'où I est le milieu de $[AB]$ On a : $z_O = 0$ donc $IO = z_I = e^{i\frac{\pi}{6}} = 1$ Et $IA = z_A - z_I = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{i\frac{\pi}{6}} = i = 1$ ainsi $IO = IA$	
	b) On a : I est le milieu de $[AB]$ alors $IA = IB$ D'autre part : $IA = IO$ d'où $IO = IA = IB$ ainsi A, B et O appartiennent au cercle de centre I et de rayon IA Conclusion : A, B et O appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$	
3)	a) $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors $\frac{z_C+z_O}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}} = z_I$ d'où I est le milieu de $[OC]$ ainsi $OC = 2IO = AB$ avec O, A et B sont non alignés donc les diagonales $[AB]$ et $[OC]$ du quadrilatère $OBCA$ sont isométriques et se coupent en leur milieu I et par suite $OBCA$ est un rectangle de centre I	
	b) $z_A \cdot z_B = z' \cdot z'' = \frac{c}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}})$ $\Rightarrow z_A \cdot z_B = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z_A \cdot z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	
	c) $aire(OBCA) = OB \times OA = z_B \times z_A = z_A \cdot z_B = \sqrt{3} \text{ (u. a.)}$	

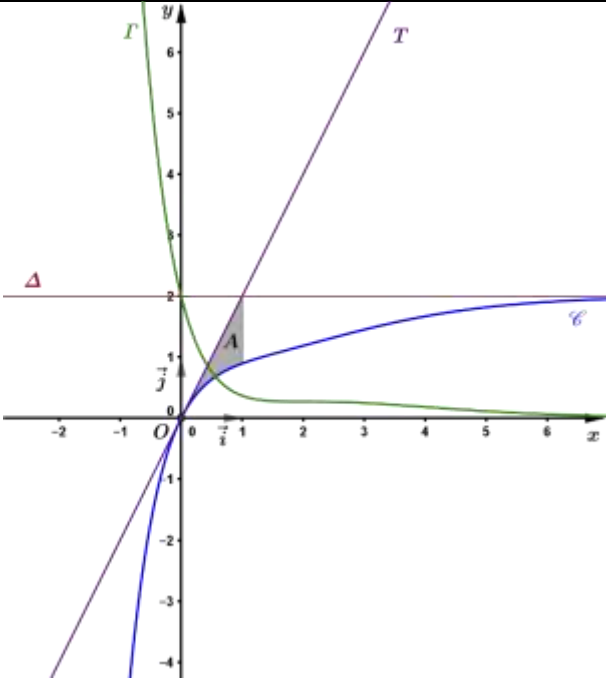
Exercice N°2: (5 points).		
Question	Corrigé	Barème
1)	a) On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors A, B et C sont non alignés et par suite ils déterminent un plan que l'on notera P	
	b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $P \Rightarrow P: x - 2y + z + d = 0$ Or $A(0,0,1) \in P$ d'où $1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$ ainsi $P: x - 2y + z - 1 = 0$	

2	a)	On a : $I(1, 0, -2)$ et $P: x - 2y + z - 1 = 0$ $x_I - 2y_I + z_I - 1 = 1 - 0 - 2 - 1 = -2 \neq 0$ donc $I \notin P$	
	b)	$V_{IABC} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{6} \left \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right = \frac{ 1+0-3 }{6} = \frac{1}{3} (u.v.)$	
3)	a)	$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0$ $\Rightarrow S: (x^2 - 2x + 1) + y^2 + (z^2 + 4z + 4) = -4 + 1 + 4$ $\Rightarrow S: (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 1 = 1^2$ d'où S est la sphère de centre $I(1, 0, -2)$ et de rayon $R = 1$	
	b)	On a : $H\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \vec{n}$ donc $(IH) \perp P$ $x_H - 2y_H + z_H - 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{5}{3} - 1 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$ donc $H \in P$ et par suite H est le projeté orthogonal de I sur P	
	c)	Soit $d = d(I, P) = IH = \frac{1}{3} \ \vec{n}\ = \frac{\sqrt{6}}{3} < 1$ donc $d < R$ alors S et P sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	
4)	a)	$I'\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right)$ et $R' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ donc $S': \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $\Rightarrow S': x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 + x^2 + 5z + \frac{25}{4} = \frac{18}{4}$ $\Rightarrow S': x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 5z + 3 = 0$	
	b)	$M(x, y, z) \in S \cap S' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0 & (I) \\ x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 5z + 3 = 0 & (II) \end{cases}$ $(II) - (I)$ donne : $x - 2y + z - 1 = 0$ d'où $M(x, y, z) \in S \cap S' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$	
	c)	D'après la question 4) b) on a : $M(x, y, z) \in S \cap S' \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ M \in P \end{cases}$ $\Leftrightarrow M \in S \cap P$ $\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$ ainsi : $S \cap S' = \mathcal{C}$ de P de centre $H\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$	

Exercice N°3: (4,5 points).		
Question	Corrigé	Barème
1)		
	b) $p(D_1 \cap D_2) = p(D_2/D_1) \times p(D_1) = 0,08 \times 0,05 = \mathbf{0,004}$	
	c) $p(D_2) = p(D_2 \cap D_1) + p(D_2 \cap \bar{D}_1) = 0,004 + 0,04 \times 0,95 = \mathbf{0,042}$	
	d) $p(D_1/\bar{D}_2) = \frac{p(D_1 \cap \bar{D}_2)}{p(\bar{D}_2)} = \frac{p(\bar{D}_2/D_1) \times p(D_1)}{p(\bar{D}_2)} = \frac{0,92 \times 0,05}{1 - 0,042} = \frac{0,046}{0,958} = \frac{23}{479} (\approx 0,048)$	
2)	a) $p(X \leq 24) = 1 - e^{-0,02 \times 24} \approx \mathbf{0,381}$	
	b) Un an vaut 12 mois $\Rightarrow p(24 \leq X \leq 36) = e^{-0,02 \times 24} - e^{-0,02 \times 36} \approx \mathbf{0,132}$	

Exercice N°4: (6,5 points).		
Question	Corrigé	Barème
1)	$f(x) = 2 - (2 + x^2)e^{-x} ; D_f = \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \underbrace{(2 + x^2)}_{+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} = \mathbf{-\infty}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \underbrace{\left(\frac{2}{x} + x\right)}_{-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} = \mathbf{+\infty}$ - La courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au $V(-\infty)$	
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (2 + x^2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\left(\frac{2+x^2}{x^2}\right)}_1 \times \underbrace{\left(\frac{1}{e^x}\right)}_0 = \mathbf{2}$ - La droite $\Delta: y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ au $V(+\infty)$	
2)	a) Pour tout réel x on a : $f'(x) > 0$	
	b) $f'(0) = 2$	

	c)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3"></td></tr><tr><td>$f'(x) - 2$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$				$f'(x) - 2$	$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	0	$+\infty$												
$f'(x)$															
$f'(x) - 2$	$+$	0	$-$												
3)		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="2">$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>2</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$	$+$		$f(x)$	$-\infty$	2				
x	$-\infty$	$+\infty$													
$f'(x)$	$+$														
$f(x)$	$-\infty$	2													
4)		$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ avec $f'(0) = 2$ et $f(0) = 2 - 2 = 0$ d'où $T: y = 2x$													
5)	a)	$g(x) = f(x) - 2x$; $D_g = \mathbb{R}$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction somme) et pour tout réel x on a : $g'(x) = f'(x) - 2$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g'(x)$	$+$	0	$-$	$g(x)$				
x	$-\infty$	0	$+\infty$												
$g'(x)$	$+$	0	$-$												
$g(x)$															
	b)	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x) = f(x) - 2x$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>position relative</td><td>$\mathcal{C}$ est au dessous de T</td><td> point d'intersection</td><td>$\mathcal{C}$ est au dessous de T</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g(x) = f(x) - 2x$	$-$	0	$-$	position relative	$\mathcal{C}$ est au dessous de T	 point d'intersection	$\mathcal{C}$ est au dessous de T	
x	$-\infty$	0	$+\infty$												
$g(x) = f(x) - 2x$	$-$	0	$-$												
position relative	$\mathcal{C}$ est au dessous de T	 point d'intersection	$\mathcal{C}$ est au dessous de T												

6)		
7)	a) Pour tout réel x on a : $f'(x) = -2xe^{-x} + (2 + x^2)e^{-x}$ d'où $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$	
	b) Pour tout réel x on a : $2 - f'(x) - 2xe^{-x} = 2 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} - 2xe^{-x}$ $= 2 - (x^2 - 2x + 2 + 2x)e^{-x}$ $= 2 - (x^2 + 2)e^{-x} = f(x)$	
	c) $\int_0^1 xe^{-x} dx = ?$; on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ $\Rightarrow \int_0^1 xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$ ainsi $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$	
	d) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2 - f'(x) - 2xe^{-x}) dx$ $= 2(1 - 0) - \int_0^1 f'(x) dx - 2 \int_0^1 xe^{-x} dx = 2 - f(1) + f(0) - 2 \left(1 - \frac{2}{e}\right)$ $= 2 - \left(2 - \frac{3}{e}\right) - 2 + \frac{4}{e} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -2 + \frac{7}{e}$	
	e) $A = \int_0^1 2x - f(x) dx = \int_0^1 (2x - f(x)) dx = \int_0^1 2x dx - \left(-2 + \frac{7}{e}\right)$ $A = [x^2]_0^1 + 2 - \frac{7}{e} = 1 + 2 - \frac{7}{e}$ ainsi $A = 3 - \frac{7}{e}$ (u. a.)	