

Correction examen mathématiques session contrôle 2023

(section sc tech)

Exercice 1 : (5points)

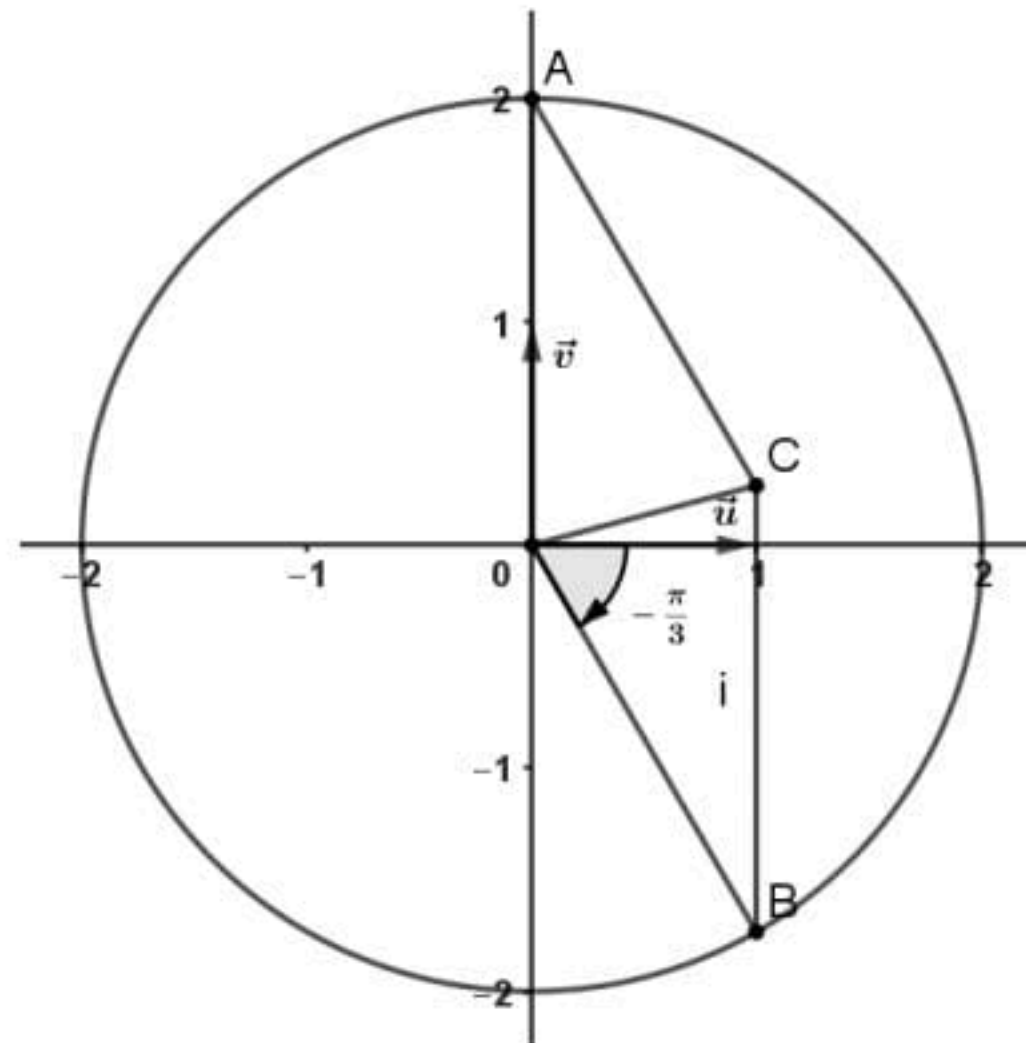
1) a)  $i(2i)^2 + (2 - \sqrt{3} - i)2i - 2 + 2i\sqrt{3} = -4i + 4i - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow z_1 = 2i$  est une solution de (E)

b)  $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2+i+\sqrt{3}}{i}$  ;  $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{i} \Rightarrow z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

c)  $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$  ;  $z_2 = 2e^{i\frac{-\pi}{3}}$

2) a)



b)  $OA = |z_1| = 2$  ;  $OB = |z_2| = 2 \Rightarrow OAB$  est un triangle isocèle en  $O$

c)  $z_A + z_B = 2i + 1 - i\sqrt{3} = 1 + i(2 - \sqrt{3}) = z_C$

d)  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$  et  $O, A$  et  $B$  ne sont pas alignés  $\Rightarrow OACB$  est un parallélogramme de plus  $OA = OB$  donc  $OACB$  est un losange

3) a)  $|z_C| = OC = \sqrt{1^2 + (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 4 + 3 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$$\text{Arg}(z_C) = (\vec{u}; \vec{OC}) + 2K\pi$$

$$= (\vec{u}; \vec{OA}) + (\vec{OA}; \vec{OC}) + 2k\pi$$

$$= (\vec{u}; \vec{OA}) + \frac{1}{2}(\vec{OA}; \vec{OB}) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

Conclusion :  $z_C = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$b) AB = |z_B - z_A|$$

$$= |1 - (2 + \sqrt{3})i|$$

$$= \sqrt{1 + (2 + \sqrt{3})^2}$$

$$= 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times OC}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

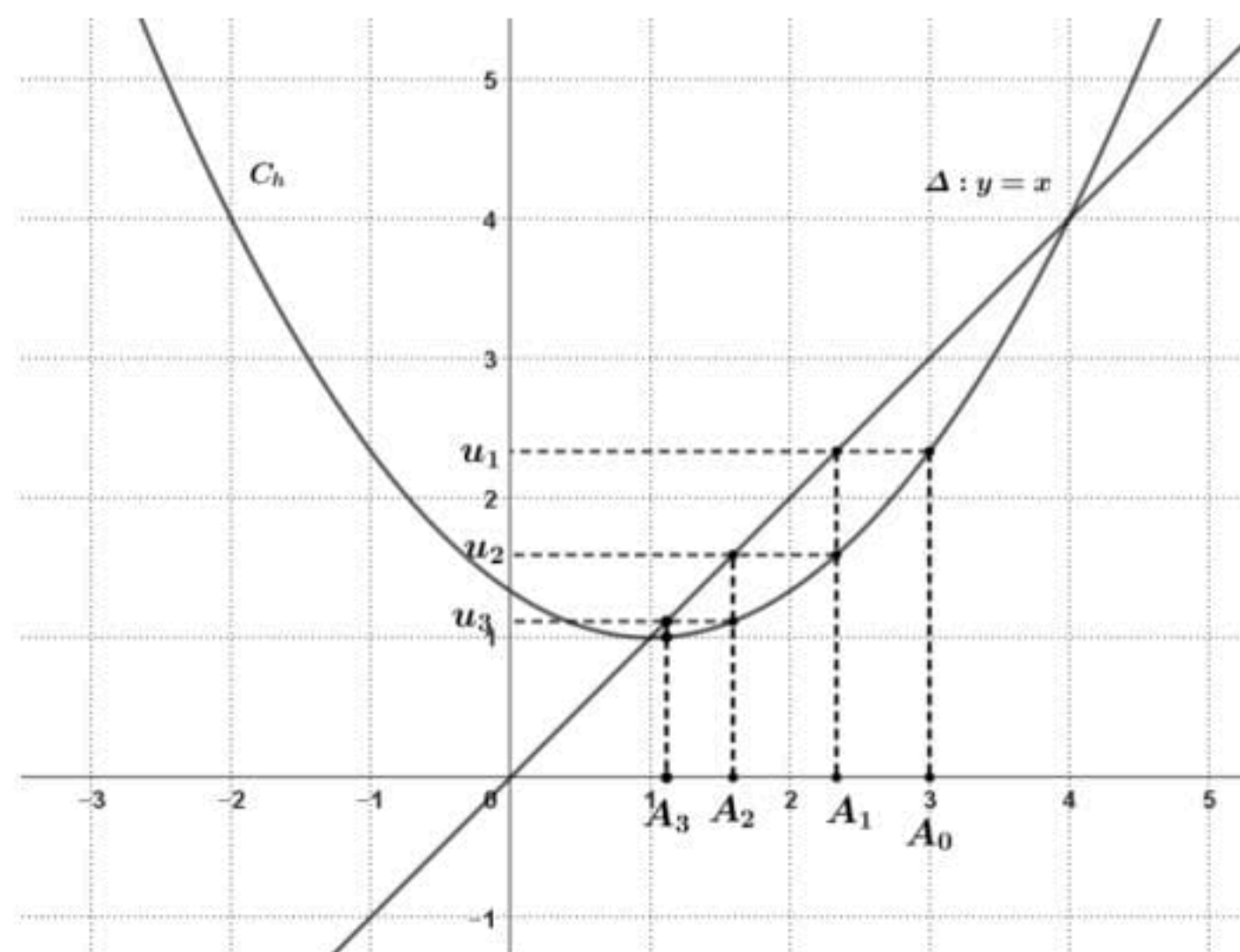
$$= 2$$

$$OC = |z_C|$$

$$= 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

### Exercice 2 : (5points)

A) 1)



2)  $(u_n)$  est décroissante et convergente vers 1

B) 1) a) pour  $n=0$   $1 \leq u_0 = 3 \leq 4$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $1 \leq u_n \leq 4$  et montrons que  $1 \leq u_{n+1} \leq 4$

$1 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow h(1) \leq h(u_n) \leq h(4)$  (car  $h$  est croissante sur  $[1; 4]$ )

$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$b) u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{3}(u_n - 1)^2 - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)^2 - (u_n - 1) = (u_n - 1)\left[\frac{1}{3}(u_n - 1) - 1\right]$$

$$= (u_n - 1)\left[\frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3} - 1\right]$$

$$= (u_n - 1) \left[ \frac{1}{3} u_n - \frac{4}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} (u_n - 1)(u_n - 4)$$

$$1 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow (u_n - 1)(u_n - 4) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

$\Rightarrow (u_n)$  est décroissante

**c)**  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente

$$\text{Soit } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n ; 1 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 1 \leq l \leq 4$$

$$u_{n+1} = h(u_n) ; h \text{ continue en } l \text{ donc } h(l) = l \Rightarrow l = 1 \text{ ou } l = 4 \text{ or } (u_n) \text{ est décroissante}$$

$$\Rightarrow u_n \leq u_0 = 3 \Rightarrow l \leq 3$$

Conclusion :  $l = 1$

$$\mathbf{2)} \quad v_n = \ln \left( \frac{u_n - 1}{3} \right)$$

$$\mathbf{a)} \quad v_{n+1} = \ln \left( \frac{u_{n+1} - 1}{3} \right) = \ln \left( \frac{\frac{1}{3}(u_n - 1)^2}{3} \right) = \ln \left( \frac{u_n - 1}{3} \right)^2 = 2 \ln \left( \frac{u_n - 1}{3} \right) = 2 v_n$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme

$$v_0 = \ln \left( \frac{u_0 - 1}{3} \right) = \ln \left( \frac{3 - 1}{3} \right) = \ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\mathbf{b)} \quad v_n = v_0 \cdot q^n = 2^n \cdot \ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\mathbf{c)} \quad w_n = \left( \frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_{n-1} - 1)}{3^n} \right)$$

$$\ln(w_n) = \ln \left( \frac{u_0 - 1}{3} \right) + \ln \left( \frac{u_1 - 1}{3} \right) + \dots + \ln \left( \frac{u_{n-1} - 1}{3} \right)$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$= \frac{v_0 (1 - 2^n)}{1 - 2}$$

$$= -\ln \left( \frac{2}{3} \right) (1 - 2^n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \ln \left( \frac{2}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \ln(w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{2}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = \ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

**Exercice 3 : (4points)**

1)  $p(A) = \frac{1}{4}$  ;  $p(\bar{A}) = \frac{3}{4}$

2) a)  $p(B/A) = \frac{c_2^2 + c_3^2}{c_5^2} = \frac{1+3}{10} = \frac{2}{5}$   $p(B/\bar{A}) = \frac{2^2 + 3^2}{5^2} = \frac{4+9}{25} = \frac{13}{25}$

b)  $p(B) = p(A) \cdot p(B/A) + p(\bar{A})p(B/\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{13}{25} = \frac{49}{100} = 0,49$

3)  $p(A/B) = \frac{p(A)p(B/A)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,49} = \frac{10}{49}$

**Exercice 4 : (6points)**

$$f(x) = x^2 + 1 + \ln(1-x)$$

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow C_f$  admet une asymptote verticale d'équation :  $x = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} = -\infty \Rightarrow C_f$  admet une branche parabolique infinie de direction (OJ) au voisinage de  $(-\infty)$

2) a)  $f'(x) = 2x - \frac{1}{1-x} = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{1-x}$

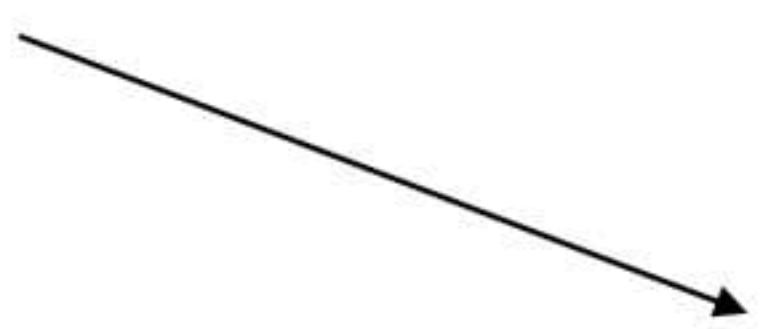
b)  $-2x^2 + 2x - 1 = 0$  ;  $\Delta = -4 < 0 \Rightarrow -2x^2 + 2x - 1 < 0$  pour tout  $x < 1$   
 $\Rightarrow f'(x) < 0$  pour tout  $x < 1$

$\Rightarrow f'(x) < 0$  pour tout  $x < 1$

$\Rightarrow f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 1[$

c)

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       |
| $f'(x)$ | -         |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |



3)  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $] -\infty, 1[$  donc  $f$  réalise une bijection de  $] -\infty, 1[$  sur  $f(] -\infty, 1[) = \mathbb{R}$

4) a)  $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x + 1$

b)  $f^{-1}(1) = 0$   $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$  est dérivable en 1

et  $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = -1$

5)  $g(x) = f(x) + x - 1$

$$a) g'(x) = f'(x) + 1 = \frac{-2x^2+2x-1}{1-x} + 1 = \frac{-2x^2+2x-1+1-x}{1-x} = \frac{-2x^2+x}{1-x} = \frac{-x(2x-1)}{1-x}$$

b)

|         |           |     |                     |                 |     |
|---------|-----------|-----|---------------------|-----------------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $\frac{1}{2}$       | $\underline{1}$ |     |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$                 | $0$             | $-$ |
| $g$     | $+\infty$ | $0$ | $\frac{3}{4}-\ln 2$ | $-\infty$       |     |

c)  $g$  continue et strictement décroissante sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  et

$$g\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left] -\infty, \frac{3}{4} - \ln 2 \right[ ; \quad 0 \in \left] -\infty, \frac{3}{4} - \ln 2 \right[$$

donc l'équation :  $g(x) = 0$  admet dans  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  une unique solution  $\alpha$

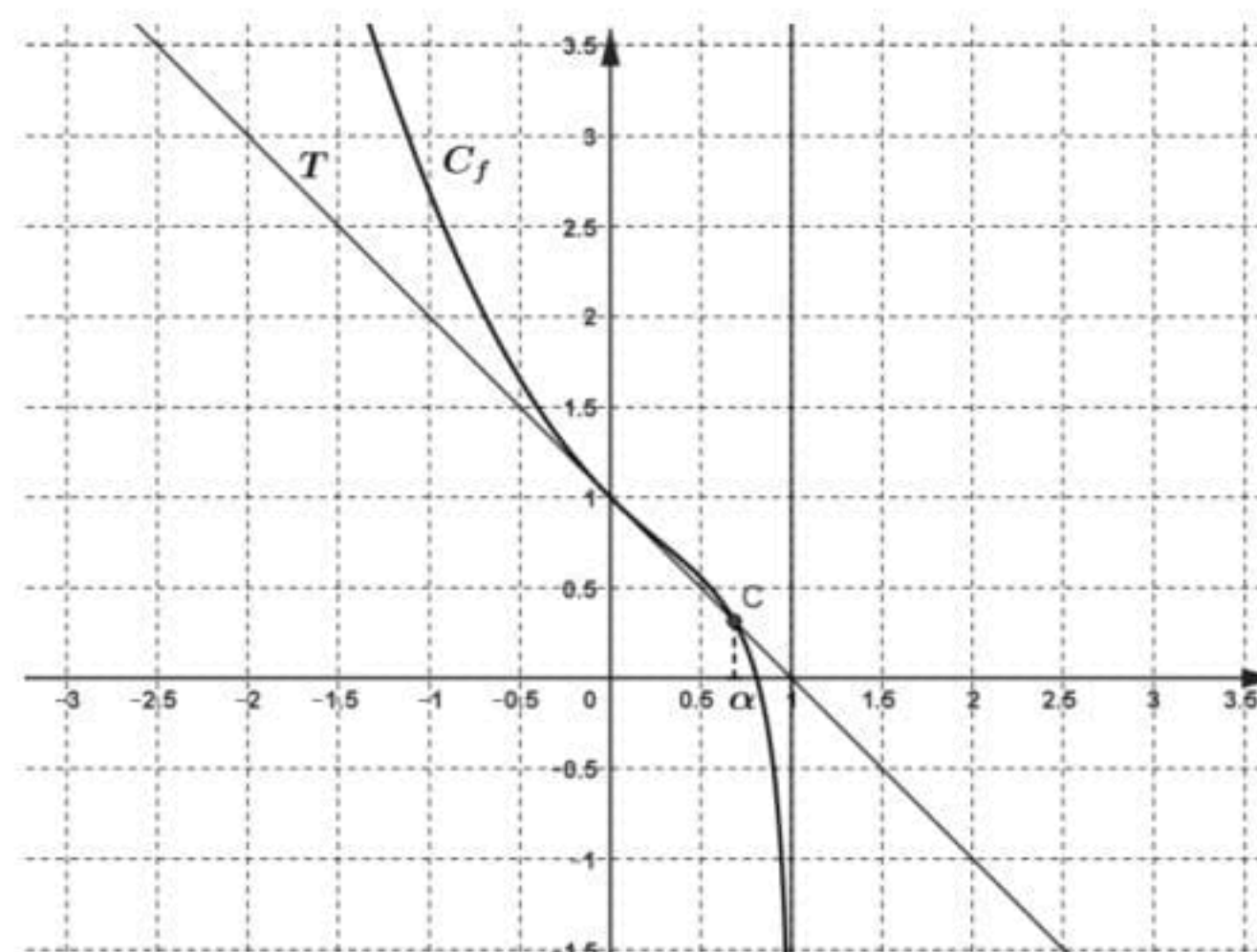
$$\text{de plus } g(0,6) = 0,04 \text{ et } g(0,7) = -0,01$$

$$\Rightarrow g(0,6) \cdot g(0,7) < 0 \quad \Rightarrow 0,6 < \alpha < 0,7$$

d)

|                          |                 |      |                 |      |                 |     |
|--------------------------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|-----|
| $x$                      | $-\infty$       | $0$  | $\alpha$        | $1$  |                 |     |
| $g(x) = f(x) - (-x + 1)$ |                 | $+$  | $0$             | $+$  | $0$             | $-$ |
| Position de $C_f$ et $T$ | $\frac{C_f}{T}$ |      | $\frac{C_f}{T}$ |      | $\frac{T}{C_f}$ |     |
|                          |                 | $pc$ |                 | $pc$ |                 |     |

6)



$$7) a) \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$$b) \int_0^\alpha \ln(1-x) dx$$

$$u(x) = \ln(1-x) \rightarrow u'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

$$v(x) = 1 \rightarrow v'(x) = x$$

$$\int_0^\alpha \ln(1-x) dx = [x \ln(1-x)]_0^\alpha + \int_0^\alpha \left( \frac{x}{1-x} \right) dx$$

$$= \alpha \ln(1-\alpha) + \int_0^\alpha \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right) dx$$

$$= \alpha \ln(1-\alpha) + [-\ln(1-x) - x]_0^\alpha$$

$$= \alpha \ln(1-\alpha) - \ln(1-\alpha) - \alpha$$

$$= \alpha(-\alpha^2 - \alpha) + \alpha^2 + \alpha - \alpha$$

$$= -\alpha^3$$

$$c) \mathcal{A} = \left( \int_0^\alpha (f(x) + x - 1) dx \right) \times 9cm^2$$

$$= \left( \int_0^\alpha (x^2 + x + \ln(1-x)) dx \right) \times 9cm^2$$

$$= \left( \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha (\ln(1-x)) dx \right) \times 9cm^2$$

$$= \left( \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} + (-\alpha^3) \right) \times 9cm^2$$

$$= \left( -\frac{2\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} \right) \times 9cm^2$$

$$= \frac{3}{2} \alpha^2 (3 - 4\alpha) cm^2$$