

Exercice 1

5,5 points

1) a) $A(1,2,1)$; $B(1,0,-1)$; $C(3,2,1)$

◆ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$ d'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

◆ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés.

1) b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P alors $P: -4y + 4z + d = 0$

comme $A(1,2,1) \in P$ alors $-8 + 4 + d = 0$ donc $d = 4$ d'où $P: -4y + 4z + 4 = 0$
ainsi $P: y - z - 1 = 0$

2) a) ◆ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0 \times 2) + (-2 \times 0) + (-2 \times 0) = 0$.

◆ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} = 0$ d'où le triangle ABC est rectangle en A .

2) b) ◆ $I = B * C$ alors $I(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-1+1}{2})$ ainsi $I(2,1,0)$.

3) a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + z^2 + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$ alors S est la sphère de centre $I(2,1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

3) b) ◆ $I(2,1,0) : -4 + 0 + 4 = 0$ donc $I \in P$.

Comme S est la sphère de centre $I(2,1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$

alors P coupe S suivant le grand cercle ($\mathcal{C}$) de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

3) c) ◆ $A(1,2,1) : 1 + 4 + 1 - 4 - 4 + 2 = 0$ donc $A \in S$.

◆ $B(1,0,-1) : 1 + 0 + 1 - 4 - 0 + 2 = 0$ donc $B \in S$.

◆ $C(3,2,1) : 9 + 4 + 1 - 12 - 4 + 2 = 0$ donc $C \in S$.

► Comme A, B et C sont des points du plan P alors le cercle ($\mathcal{C}$) est circonscrit au triangle ABC .

4) a) ◆ $\Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = -\alpha + 1 \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .

◆ $\vec{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P , comme $\vec{N} = \vec{u}$ alors $\Delta \perp P$.

◆ Pour $\alpha = 0 : I(2,1,0) \in \Delta$ et comme $I \in P$ alors Δ est perpendiculaire à P en I .



4) b) ♦ $M_\alpha(2, 1-\alpha, \alpha)$, $P: y-z-1=0$: $\triangleright d(M_\alpha, P) = \frac{|1-\alpha-\alpha-1|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{|-2\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |\alpha|$

4) c) $\alpha \neq 0$. $\mathcal{V}_{ABCM_\alpha} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM_\alpha}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\alpha \\ \alpha-1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |4+4\alpha+4\alpha-4| = \frac{|8\alpha|}{6} = \frac{4}{3} |\alpha|$.

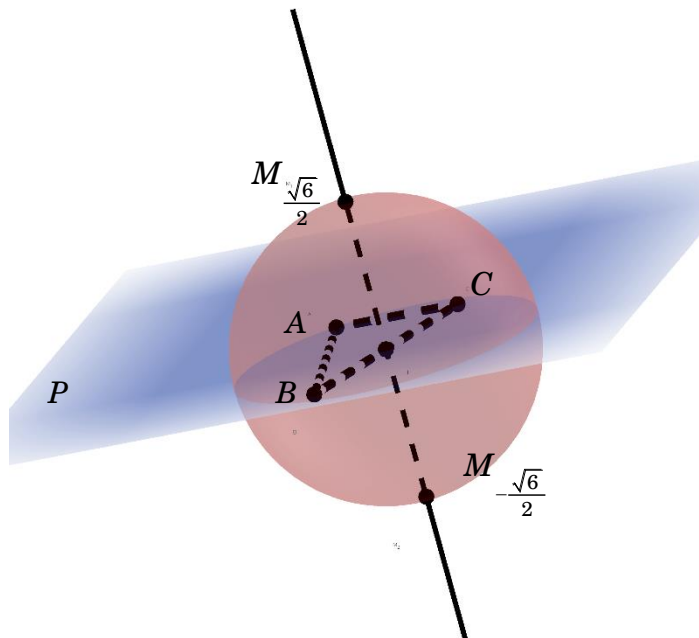
4) d) $\mathcal{V}_{ABCM_\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} |\alpha| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow |\alpha| = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4) e) ♦ $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$: $M_{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(2, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$.

$\triangleright 4 + \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - 8 - 2 + \sqrt{6} + 2 = 4 + 1 - \sqrt{6} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 8 - 2 + \sqrt{6} + 2$ donc $M_{\frac{\sqrt{6}}{2}} \in S$.

♦ $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$: $M_{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(2, 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$.

$\triangleright 4 + \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - 8 - 2 - \sqrt{6} + 2 = 4 + 1 + \sqrt{6} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 8 - 2 - \sqrt{6} + 2$ donc $M_{-\frac{\sqrt{6}}{2}} \in S$.



Exercice 2

4 points

1) a) ♦ $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = 12 + 8\sqrt{3}i - 4 = 8 + 8\sqrt{3}i$.

1) b) $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 - 2i\sqrt{3} = 0$

$\triangleright \Delta = (2i\sqrt{3})^2 - 4(-5 - 2i\sqrt{3}) = -12 + 20 + 8i\sqrt{3} = 8 + 8i\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2i)^2 \Rightarrow \delta = 2\sqrt{3} + 2i$

$\triangleright z_1 = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$; $z_2 = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2i}{2} = -\sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i$

$S_C = \{ \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i ; -\sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i \}$



2) a) ♦ $z_E = 1$; $z_F = \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_G = -\sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$.

$$z_G - 1 = -\sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}) - 1 = i(\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3} + i) = i(\sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) - 1) = i(z_F - 1).$$

2) b) ♦ $z_G - 1 = i(z_F - 1) \Leftrightarrow \frac{z_G - 1}{z_F - 1} = i \Leftrightarrow \frac{z_{\overline{EG}}}{z_{\overline{EF}}} = i \in i\mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{EF}$

♦ $\frac{z_{\overline{EG}}}{z_{\overline{EF}}} = i \Rightarrow \frac{|z_{\overline{EG}}|}{|z_{\overline{EF}}|} = |i|$ d'où $\frac{EG}{EF} = 1$ donc $EG = EF$.

ainsi le triangle EFG est rectangle isocèle en E .

2) c) $H = F * G$ alors $z_H = \frac{z_F + z_G}{2} = \frac{\sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})}{2} = i\sqrt{3}$

2) d) Le triangle EFG est rectangle isocèle en E , comme $H = F * G$ alors (EH) est la médiatrice du segment $[FG]$.

3) a) ♦ $EH = |z_H - z_E| = |i\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3 + 1} = 2$ alors H appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre E et de rayon 2.

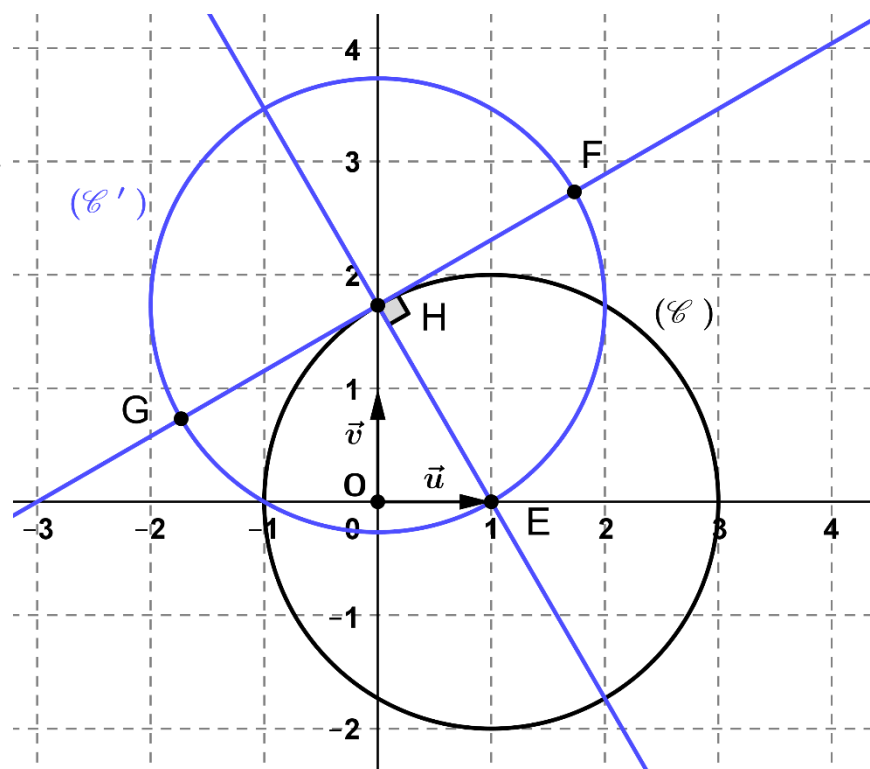
3) b) $z_H = i\sqrt{3}$ alors $H \in (\mathcal{C}) \cap (O, \vec{u})$

4) a) $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre H et de rayon 2.

♦ $HE = 2$ alors $E \in (\mathcal{C}')$.

♦ Le triangle EFG est rectangle en E et $H = F * G$ alors $HE = HF = HG$ d'où $F, G \in (\mathcal{C}')$
 ► ainsi $(\mathcal{C}')$ est le cercle circonscrit au triangle EFG .

4) b) Construction F et G .



Exercice 3

4 points

1) a) $(u_n) : \begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{3u_n^2 + 4}}{2} \end{cases}$; Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{Z}, 0 < u_n < 2$.

• Pour $n = 0$, $0 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$. (la proposition est vraie pour $n = 0$).

• Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

4 points

$$\diamond u_{n+1} = \frac{\sqrt{3u_n^2 + 4}}{2} > 0.$$

$$\diamond \text{ On a } 0 < u_n < 2 \Leftrightarrow 0 < u_n^2 < 4 \Leftrightarrow 0 < 3u_n^2 < 12 \Leftrightarrow 4 < 3u_n^2 + 4 < 16 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{3u_n^2 + 4} < 4 \\ \Leftrightarrow 1 < \frac{\sqrt{3u_n^2 + 4}}{2} < 2 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < 2.$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2$.

1) b) $\diamond u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{3u_n^2 + 4}{4} - u_n^2 = \frac{3u_n^2 + 4 - 4u_n^2}{4} = \frac{4 - u_n^2}{4}.$

1) c) $\diamond u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{4 - u_n^2}{4} = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{4} > 0$ d'où $u_{n+1}^2 > u_n^2$ et comme $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > u_n$ ainsi (u_n) est croissante.

► (u_n) est croissante majorée par 2 alors (u_n) est convergente.

$\diamond$ On a $\star u_{n+1} = f(u_n)$; avec $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{2}$

$\star (u_n)$ converge vers ℓ avec $0 \leq \ell \leq 2$.

$\star f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en ℓ .

$$\text{alors } \ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\sqrt{3\ell^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow 4\ell^2 = 3\ell^2 + 4 \Leftrightarrow \ell^2 = 4 \Leftrightarrow \ell = -2 \text{ ou } \ell = 2.$$

et comme $0 \leq \ell \leq 2$ alors $\ell = 2$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

2) a) $v_n = u_n^2 - 4$ ► $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \frac{3u_n^2 + 4}{4} - 4 = \frac{3u_n^2 + 4 - 16}{4} = \frac{3u_n^2 - 12}{4} = \frac{3(u_n^2 - 4)}{4} = \frac{3}{4}v_n$
alors (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

2) b) $\diamond v_n = v_0 \cdot q^n = -\frac{7}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$

2) c) $\diamond \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2 - 4 \Leftrightarrow u_n^2 = 4 + v_n = 4 - \frac{7}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ d'où $u_n = \sqrt{4 - \frac{7}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$



$$3) \blacklozenge S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n \left(4 - \frac{7}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) = \sum_{k=0}^n 4 - \frac{7}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4} \right)^k = 4(n+1) - \frac{7}{4} \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\text{alors } S_n = 4(n+1) - 7 \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} \right).$$

$$\blacklozenge \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(n+1) - 7 \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} \right)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4 + \frac{1}{n} - \frac{7 \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} \right)}{n} \right] = 4$$

Exercice 4**6,5 points**

1) a) $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$; $x \in]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		—	+
g			

1) b) $\blacklozenge g(1) = 3$.

$\blacklozenge g$ admet sur $]0, +\infty[$ un minimum absolu en 1 de valeur 3 alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) \geq 3 > 0$.

2) a) $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$; $x \in]0, +\infty[$.

$$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\searrow 0} \right) = +\infty.$$

2) b) $\blacklozenge \forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 + 2 \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = 1 + 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$.

2) c) Le tableau de variation de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

2) d) $\blacklozenge f$ est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$
alors l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]0, +\infty[$ une solution unique α

2) e) $\begin{cases} f(0,7) \approx -0,319 \\ f(0,8) \approx -0,242 \end{cases}$, $f(0,7) \times f(0,8) < 0$ alors $0,7 < \alpha < 0,8$

3) a) $\blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = 0$

$\blacktriangleright$ alors la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.



3) b) ♦ $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) - x = 2 \frac{\ln x}{x}$ alors

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	—	○	+
$\left(\begin{array}{c} \text{Position} \\ (\mathcal{C}) \text{ et } \Delta \end{array} \right)$	$\frac{\Delta}{(\mathcal{C})}$	$\frac{(\mathcal{C})}{\Delta}$	

4) a) ♦ $T: y = \underbrace{f'(e)}_1(x - e) + \underbrace{f(e)}_{e + \frac{2}{e}} = x + \frac{2}{e}$.

♦ T et Δ ont le même coefficient directeur 1 alors $T \parallel \Delta$.

4) b) $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) - (x + \frac{2}{e}) = x + \frac{2 \ln x}{x} - x - \frac{2}{e} = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{e} = \frac{2}{x} \left(\ln x - \frac{x}{e} \right)$

ainsi $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) - (x + \frac{2}{e}) = \frac{2}{ex} (e \ln x - x)$.

4) c) $h(x) = e \ln x - x$; $x \in]0, +\infty[$.

♦ $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e - x}{x}$

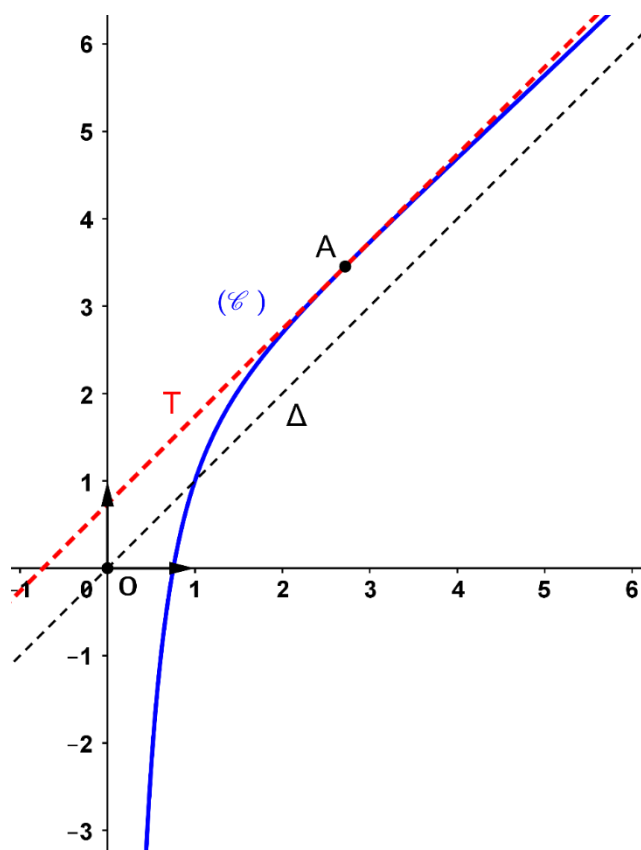
♦ $h(e) = 0$

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$	+	○	—
h		0	

4) d) ♦ h admet un maximum absolu en e de valeur 0 alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $h(x) \leq 0$.

d'où $f(x) - (x + \frac{2}{e}) = \frac{2}{ex} h(x) \leq 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessous de T sur $]0, +\infty[$.

5) La courbe $(\mathcal{C})$.



6) a) ♦ Si $\lambda \geq 1$: $I(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x) - x) dx = \int_1^\lambda 2 \frac{\ln x}{x} dx = 2 \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^\lambda = [\ln^2 x]_1^\lambda = (\ln \lambda)^2$.

♦ Si $0 < \lambda \leq 1$: $I(\lambda) = \int_\lambda^1 (x - f(x)) dx = \int_\lambda^1 -2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^\lambda 2 \frac{\ln x}{x} dx = [\ln^2 x]_1^\lambda = (\ln \lambda)^2$.

► Conclusion : $\forall \lambda > 0 : I(\lambda) = (\ln \lambda)^2$

6) b) ♦ $\frac{1}{\lambda} > 0$: $I\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\ln \frac{1}{\lambda}\right)^2 = (-\ln \lambda)^2 = (\ln \lambda)^2$.

6) c) ♦ $I(\lambda) = 2 \Leftrightarrow (\ln \lambda)^2 = 2 \Leftrightarrow |\ln \lambda| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \ln \lambda = \sqrt{2} \text{ ou } \ln \lambda = -\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow \lambda = e^{\sqrt{2}} \text{ ou } \lambda = e^{-\sqrt{2}}$.

