

$$1) \text{ a) } AC = |z_C - z_A| = |2 + i\sqrt{3} - 1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \text{ et}$$

$$AD = |z_D - z_A| = |2 - i\sqrt{3} - 1| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \text{ donc } AC = AD = 2 \text{ d'où } C \text{ et } D \text{ appartiennent au cercle } (\mathcal{C}) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } 2.$$

b) Vérifier que les points C et D sont symétriques par rapport à la droite (AB).

b) $z_C = \overline{z_D}$ et (AB) est l'axe des abscisses donc C et D sont symétriques par rapport à la droite (AB).

c) Construire dans la figure de l'annexe ci-jointe les points C et D.

d) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $3\sqrt{3}$.

d) Les points C et D sont symétriques par rapport à (AB) donc BCD est isocèle en B.

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} |2 - z_B| |z_C - z_D| = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

2) Soient $\theta \in]0, \pi[$ et M et N les points d'affixes respectives $z_M = 1 + 2e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + 2e^{-i\theta}$

a) Vérifier que $z_N = \overline{z_M}$. En déduire que le triangle BMN est isocèle en B.

2) a)

$$\overline{z_M} = \overline{1 + 2e^{i\theta}} = 1 + 2\overline{e^{i\theta}} = 1 + 2e^{-i\theta} = z_N \text{ donc M et N sont symétriques par rapport (AB)}$$

Donc BM = BN (B, M et N sont distincts car $\theta \in]0, \pi[$) ainsi le triangle BMN est isocèle B.

b) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [MN].

$$b) z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{z_M + \overline{z_M}}{2} = \operatorname{Re}(z_M) = 1 + 2\cos\theta$$

c) Soit S l'aire du triangle BMN. Montrer que $S = 4(1 + \cos\theta)\sin\theta$.

$$c) S = \frac{1}{2} IB \times NM = \frac{1}{2} |z_B - z_I| |z_M - z_N| = \frac{1}{2} \times |2 - (1 + 2\cos\theta)| \times |2i(2\sin\theta)| = 4|1 + \cos\theta| |\sin\theta|$$

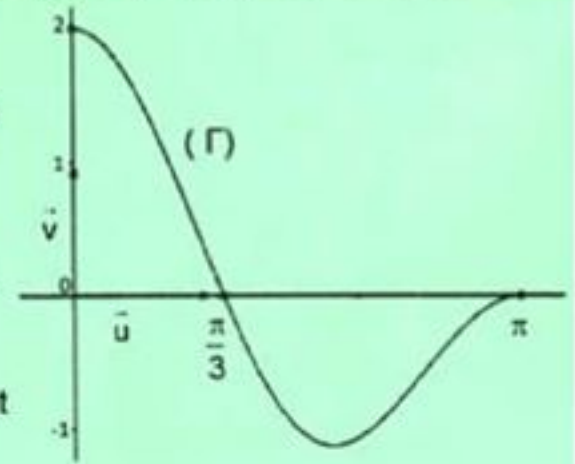
comme $\theta \in]0, \pi[$ donc $\sin\theta > 0$ et $1 + \cos\theta > 0$ d'où $S = 4(1 + \cos\theta)\sin\theta$

3) Soit h la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $h(x) = (1 + \cos x) \sin x$.

La courbe (Γ) ci-contre est la représentation graphique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de la fonction dérivée h' de h .

- (Γ) coupe la droite $(O, \vec{u})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{\pi}{3}$ et π .

- A l'aide du graphique, justifier que le maximum de h est atteint en $\frac{\pi}{3}$.
- En déduire que l'aire du triangle BMN est maximale si et seulement si $M = C$ et $N = D$.



3) a) Tableau de variation de h

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

Donc le maximum de h est $\frac{\pi}{3}$.

b) $S = h(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$

$\Leftrightarrow S$ est maximale si $h(\theta)$ est maximale $\Leftrightarrow$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow, z_M = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + 1 + i\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3} = z_C$ donc $M=C$ et $z_N = \overline{z_M} = \overline{z_C} = z_D$ donc $N = D$.

Exercice n° 3

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-1, -1, 3)$, $B(0, -3, 1)$ et $C(-3, 0, 1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.

1) a) $\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne sont pas alignés ils déterminent donc un plan P.

c) Vérifier qu'une équation cartésienne de P est : $2x + 2y - z + 7 = 0$.

Le plan P de vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'où P d'équation $6x + 6y - 3z + d = 0$ et $B(0, -3, 1) \in P$

donc $d = 21$

P d'équation $6x + 6y - 3z + 21 = 0$ ainsi une équation cartésienne de P est $2x + 2y - z + 7 = 0$

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre le point $I(3, -1, 2)$ et de rayon 5.

$$2) a) M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + (z-2)^2 - 4 - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 25$$

Donc S est la sphère de centre le point $I(3, -1, 2)$ et de rayon 5.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle (ζ) de centre le point $H(1, -3, 3)$ et de rayon 4.

$$d(I, P) = \frac{|6 - 2 - 2 + 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{3} = 3 < 5, \text{ donc P coupe S suivant un cercle } (\xi) \text{ de rayon}$$

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

$$2 \times 1 + 2 \times (-3) - 3 + 7 = 9 - 9 = 0 \text{ donc } H(1, -3, 3) \in P$$

$$\overrightarrow{HI} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_P} \text{ donc } (HI) \perp P. \text{ Ainsi H est le projeté orthogonal de I sur P.}$$

D'où P coupe S suivant un cercle (ξ) de centre $H(1, -3, 3)$ rayon $r = 4$

3) Soit Q le plan d'équation : $x - 2y - 2z + 11 = 0$.

a) Montrer que Q est perpendiculaire à P.

$$3) a) \overrightarrow{n_P} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ le normal à P et } \overrightarrow{n_Q} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 2 - 4 + 2 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \text{ et par suite Q est perpendiculaire à P.}$$

b) Soit Δ la droite d'intersection de P et Q.

Vérifier qu'une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$

b) $M \in \Delta$ donc $M(-1 - 2\alpha, \alpha, 5 - 2\alpha)$ donc

$$2(-1 - 2\alpha) + 2\alpha - (5 - 2\alpha) + 7 = -2 - 4\alpha + 2\alpha - 5 + 2\alpha + 7 = 4\alpha - 4\alpha - 7 + 7 = 0 \text{ d'où } M \in P.$$

donc $\Delta \subset P$.

$$-1 - 2\alpha - 2\alpha - 2(5 - 2\alpha) + 11 = -1 - 2\alpha - 2\alpha - 10 + 4\alpha + 11 = -4\alpha + 4\alpha - 11 + 11 = 0 \text{ d'où } M \in Q.$$

donc $\Delta \subset Q$. Ainsi $\Delta = P \cap Q$

c) Calculer la distance du point H à la droite Δ .

c) La droite Δ passe par le point de coordonnées $E(-1, 0, -5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{HE} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HE} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d(H, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{HE} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{64 + 64 + 16}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}} = 4$$

Autre méthode : $H \in P$, $\Delta = P \cap Q$ et Q est perpendiculaire à P donc $d(H, \Delta) = d(H, Q)$

d) En déduire que dans le plan P , la droite Δ est la tangente au cercle (ζ) au point $J(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{17}{3})$.

d) Dans le plan P , $d(H, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{HE} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 4 = r$ donc Δ est tangent au cercle (ζ) .

$$HJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 3\right)^2 + \left(\frac{17}{3} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{144}{9}} = 4 \text{ donc } J \in (\zeta).$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} = -1 - 2\alpha \\ -\frac{1}{3} = \alpha \\ \frac{17}{3} = 5 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -\frac{2}{3} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \\ 2\alpha = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3} \text{ donc } J \in \Delta$$

Ainsi la droite Δ est la tangente au cercle (ζ) au point J .

Exercice n° 4

7 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 1$.

1) a) Etudier les variations de g .

1) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$1 - \frac{1}{e}$	$+\infty$

b) En déduire que pour tout réel x , $g(x) > 0$.

$g(-1) = 1 - \frac{1}{e}$ est un minimum de g sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$ ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+1)e^{-x} + e^{-2x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

$$2) \ a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x+1)e^{-x} + e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{e^x}}_0 \right) + \underbrace{e^{-2x}}_0 = 0 \quad \text{la courbe (C) admet une}$$

asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x+1)e^{-x} + e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2(x+1)e^x + 1)e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{2xe^x + 2e^x + 1}_1 \right) e^{-2x} = +\infty$$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \left(\frac{x+1}{x} \right) + \frac{e^{-x}}{x} \right) e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \left(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_1 \right) + \underbrace{\frac{1}{xe^x}}_{0^-} \right) \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} = -\infty$$

Donc la courbe (C) de f admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

3) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -2e^{-2x}g(x)$.

3) a) la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{Pour tout réel } x > 0, \quad f'(x) = 2(e^{-x} - (x+1)e^{-x}) - 2e^{-2x} = 2(-xe^{-x}) - 2e^{-2x}$$

$$= -2e^{-2x}(xe^x + 1) = -2e^{-2x}g(x)$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

b) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2e^{-2x}g(x)$ et $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$ donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0



4) a) Vérifier qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = -2x + 3$.

4)a) Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -2x+3$ donc le point la droite (T): $y = -2x+3$ est la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + 2x - 3$ et on donne ci-dessous le sens de variations de h.



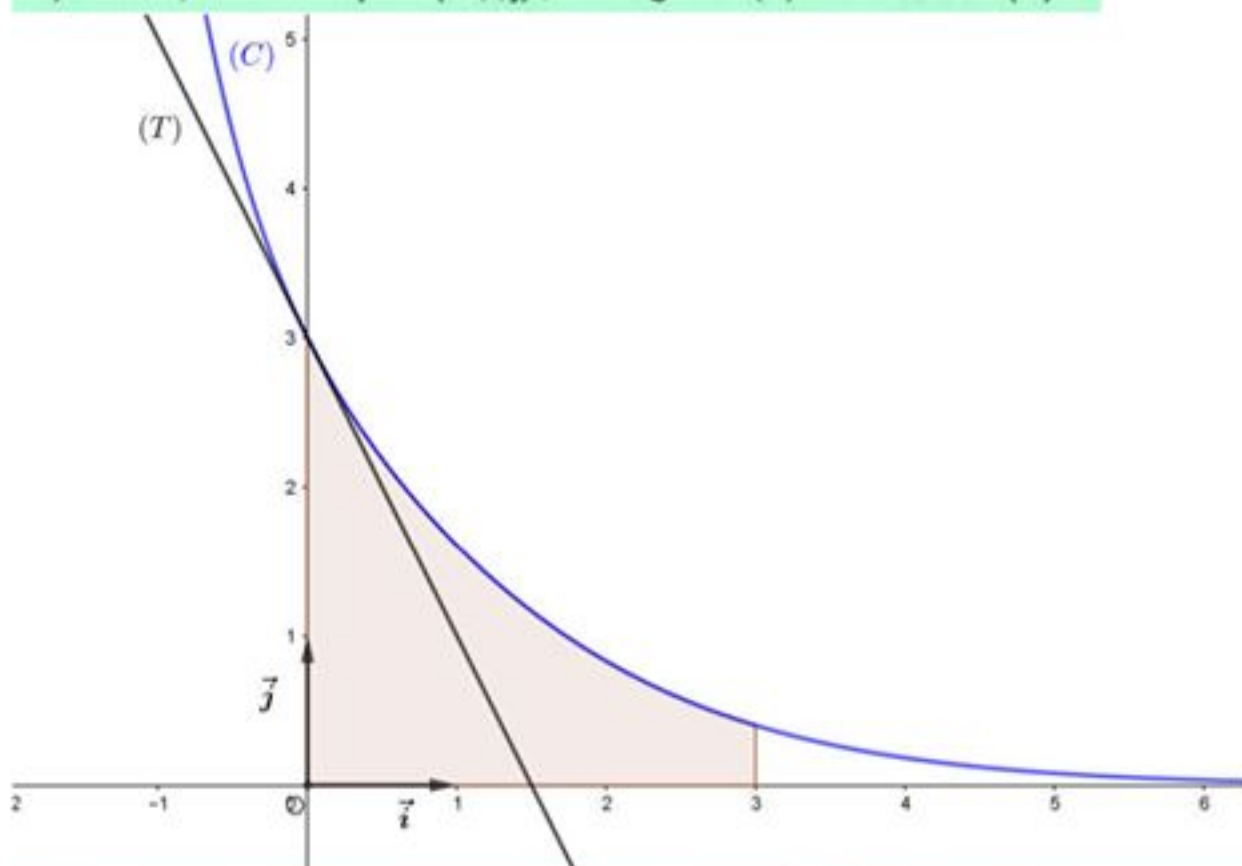
Calculer $h(0)$ et en déduire la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

b) $h(0) = f(0) + 2 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$.

$h(0)=0$ est un minimum de h sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) + 2x - 3$		+	0	+	
Position de (C) et (T)	(C) est au-dessus de (T)		(C)=(T)	(C) est au-dessus de (T)	

5) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C).



6) Soit n un entier naturel non nul. On pose $U_n = \int_0^n f(t) dt$.

a) Interpréter géométriquement U_n .

6) a) Pour tout $n \geq 1$, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0, n]$ donc $U_n = \int_0^n f(t) dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

b) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - f'(x)$.

$$\begin{aligned} 2e^{-x} - e^{-2x} - f'(x) &= 2e^{-x} - e^{-2x} - 2(-xe^{-x}) + 2e^{-2x} \\ &= 2e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-2x} = 2(x+1)e^{-x} + e^{-2x} = f(x) \end{aligned}$$

c) Montrer que $U_n = \frac{9}{2} - 2e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-2n} - f(n)$.

$$\begin{aligned} U_n &= \int_0^n f(t) dt = \int_0^n (2e^{-t} - e^{-2t} - f'(t)) dt = \left[-2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - f(t) \right]_0^n = -2e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-2n} - f(n) + 2 - \frac{1}{2} + 3 \\ &= \frac{9}{2} - 2e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-2n} - f(n) \end{aligned}$$

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} - \underbrace{2e^{-n}}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{e^{-2n}}_0 - \underbrace{f(n)}_0 = \frac{9}{2}$$