

Correction proposée par : M. Abderrazek BERREZIG - Professeur principal-

Lycée ASSAD IBN AL FOURAT OUED ELLIL

Exercice 1 : (0,75 x 4)

1)	2)	3)	4)
b	c	b	c

Exercice 2 :

1) (E) : $2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)z + 1 + \sqrt{3}i = 0$

a) $2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i) + 1 + \sqrt{3}i = 2 - 3 - \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = -1 - \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 0$ donc $z' = 1$ est une racine de l'équation (E).

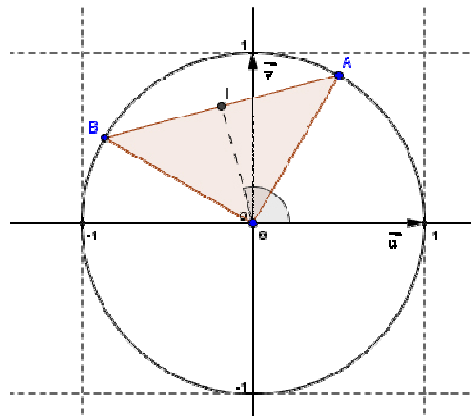
b) l'autre racine de (E) est $z'' = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) $z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_B = iz_A = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ I : milieu du segment [AB] donc $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

a) $z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_B = iz_A = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b)



3) a) $\frac{z_{\overline{OB}}}{z_{\overline{OA}}} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{i z_A}{z_A} = i$

Donc $(OA) \perp (OB)$ et $|z_{\overline{OB}}| = |z_{\overline{OA}}| \Leftrightarrow OB = OA$ ainsi OAB est isocèle rectangle en O.

b) OAB est isocèle rectangle en O et I milieu de [AB] donc $OI = IA = IB = \frac{AB}{2}$ or $OA = OB = 1$ donc $AB = \sqrt{2}$

ainsi $OI = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}
 (\vec{u}, \vec{OI}) &\equiv (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OI}) [2\pi] \\
 &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\
 &\equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$c) z_1 = \frac{z_A + iz_A}{2} = \frac{(1+i)z_A}{2} = \frac{(1+i)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{1-\sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Or } \arg(z_1) \equiv (\vec{u}, \vec{OI}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi] \text{ et } |z_1| = OI = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \text{ ainsi}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Exercice 3

1) La probabilité pour qu'un candidat coche la réponse exacte est $\frac{1}{3}$

La probabilité pour qu'un candidat coche une réponse incorrecte est $\frac{2}{3}$

A : le candidat coche la réponse exacte pour la première réponse seulement.

$$p(A) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

B : le candidat coche une seule réponse exacte.

$$p(B) = C_4^1 \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \frac{8}{81} = \frac{32}{81}$$

C : le candidat ne coche aucune réponse exacte.

$$p(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

2) a) Ω : l'univers des cas possibles. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

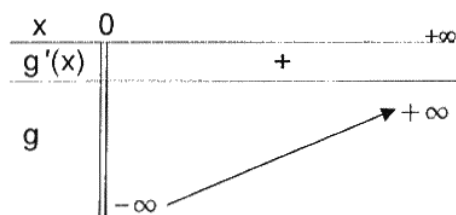
b) une épreuve dont l'univers Ω possède exactement deux issues, réponse exacte donc un succès ou réponse incorrecte donc un échec. On répète cette épreuve 4 fois de suite (4 questions indépendantes) donc X la variable aléatoire égale à la note totale attribuée au candidat dans cet exercice suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

Loi de probabilité de X : $p(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ $k \in X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$c) E(X) = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad V(X) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 4 :

I-



1) g est continue sur $]0, +\infty[$ et $g(x) \in]-\infty, +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]0, +\infty[$ et comme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc α est unique.

$g(1) = 2 - 1 + 2\ln 1 = 1$ et $g(0,75) = 0,75 - 1 + 2\ln 0,75 \approx -0,83$ donc $g(1) \times g(0,75) < 0$ d'où $0,75 < \alpha < 1$.

2) $g(x) < 0$ sur $]0, \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$

II- 1) f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 - \frac{1}{x^2} \ln x = +\infty.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) - (2x - 1) = -\frac{\ln x}{x^2}$ et $\begin{cases} \ln x < 0 & \text{si } x \in]0, 1[\\ \ln x > 0 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$

Donc si $x \in]0, 1[$, $f(x) - (2x - 1) > 0$ ainsi ($\mathcal{C}$) au dessus de Δ .

si $x \in]1, +\infty[$, $f(x) - (2x - 1) < 0$ ainsi ($\mathcal{C}$) au dessous de Δ .

2) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x^2} - 2x \ln x}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

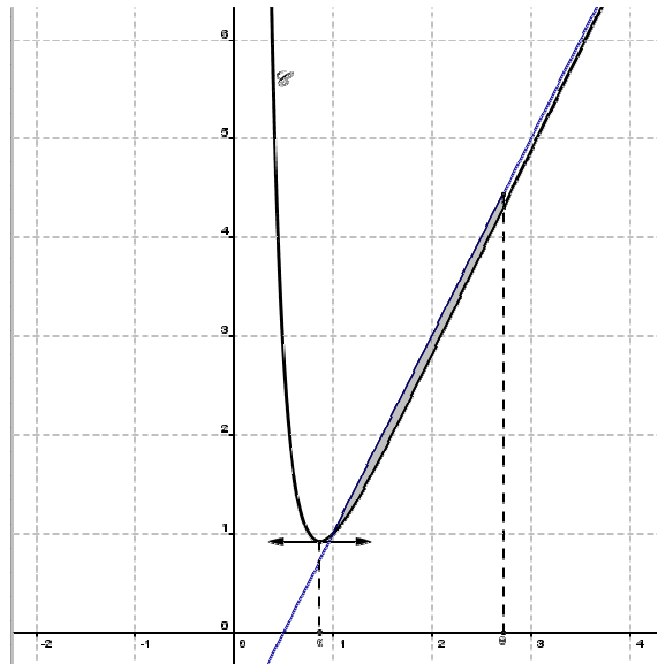
b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

Signe ($f'(x)$) = signe ($g(x)$) donc d'après 2)

	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$f(\alpha)$

3)



4) $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (2x - 1)| dx = \int_1^e (2x - 1) - f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\frac{-1 - \ln x}{x} \right]_1^e = \frac{-2}{e} + 1 = \frac{e - 2}{e}$ ua

Ou bien on peut faire une intégration par parties.

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (2x - 1)| \, dx = \int_1^e (2x - 1) - f(x) \, dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases} \text{ d'où } \mathcal{A} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} \text{ ua}$$