

Matière : Mathématiques

Exercice n°1 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres Complexes, probabilité conditionnelle.
 - ✓ **Aptitudes visées :** Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer le module et le conjugué d'un nombre complexe, appliquer la formule de la probabilité totale.
 - ✓ **Corrigé :**
- 1) c) 2) b) 3) c) 4) b)

Exercice n°2 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres Complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, une équation du second degré ; connaître la relation entre les racines d'une équation du second degré ; interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.
- ✓ **Corrigé :**

- 1) a- $(3 - i)^2 = 3^2 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.
b- (E) : $z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$; $\Delta = (1 + i)^2 + 4(-2(1 - i)) = 8 - 6i = (3 - i)^2$.
 $z_1 = -2$; $z_2 = 1 - i$.
- 2) $\theta \in [0, \pi]$, (E_θ) : $z^2 + (1 + e^{i\theta})z - 2(1 - e^{i\theta}) = 0$.
a- On a : $(-2)^2 + (1 + e^{i\theta})(-2) - 2(1 - e^{i\theta}) = 4 - 2 - 2e^{i\theta} - 2 + 2e^{i\theta} = 0$
b- $(-2)z_2 = -2(1 - e^{i\theta})$ signifie $z_2 = 1 - e^{i\theta}$
- 3) A(-2) et M_θ(1 - e^{iθ})
a- $AM_\theta = |1 - e^{i\theta} + 2| = |3 - e^{i\theta}| = |3 - \cos\theta - i \sin\theta| = \sqrt{10 - 6\cos\theta}$.
b- AM_θ est maximale si $\cos\theta = -1$ soit $\theta = \pi$.

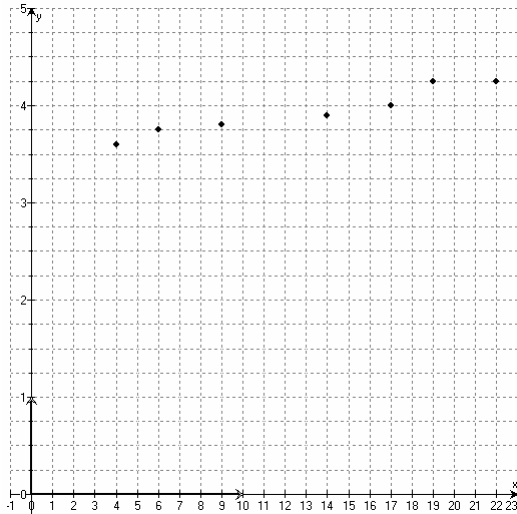
Exercice n°3 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Série statistique double.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un nuage de points, justifier un ajustement affine, calculer et interpréter le coefficient de corrélation, déterminer une équation de la droite de régression et l'interpréter pour donner une estimation.

✓ **Corrigé :**

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kilogrammes)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

1) a-



Nuages des points associés
à la série (X,Y)

b- D'après le nuage des points, un ajustement affine de la série double est bien justifié .

2) a- $\bar{x} = 13$; $\sigma_x = 6,324$.

b- $\bar{y} = 3,971$; $\sigma_y = 0,287$.

3) a- Le coefficient de corrélation entre X et Y est : $r = 0,946$.

b- Il ya une très forte corrélation entre x et y.

4) a- $\text{Cov}(X, Y) = 1,721$

b- L'équation de la droite de régression de Y en X est de la forme : $y = a x + b$

$$\text{avec } a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{1,721}{40} = 0,04 \text{ ; } b = \bar{y} - a\bar{x} = 3,41$$

D'où une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 0,04x + 3,41$

5) a- $x = 30$ alors $y = (0,04)(30) + 3,41 = 4,61$.

Une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance est 4,61 kg.

b- pour $y = 3,85$ kg on obtient $3,85 = 0,04x + 3,41$ d'où $x = 11$

Ainsi l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 kg est égal à 11 jours.

Exercice 4 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle, suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une fonction, déterminer les asymptotes à sa courbe, étudier la position relative de deux courbes, appliquer l'inégalité des accroissements finis, étudier la convergence d'une suite réelle définie par une fonction.

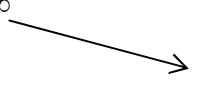
✓ **Corrigé :**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x})$.

1) a- $u : x \rightarrow 1 + e^{-x}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \rightarrow \ln(1 + e^{-x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}.$$

b- tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$  0	

c- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{-x}(e^x + 1)) = \frac{1}{2}(\ln(e^{-x}) + \ln(e^x + 1)) = \frac{1}{2}(-x + \ln(e^x + 1))$

$$\text{d'où } f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^x)$$

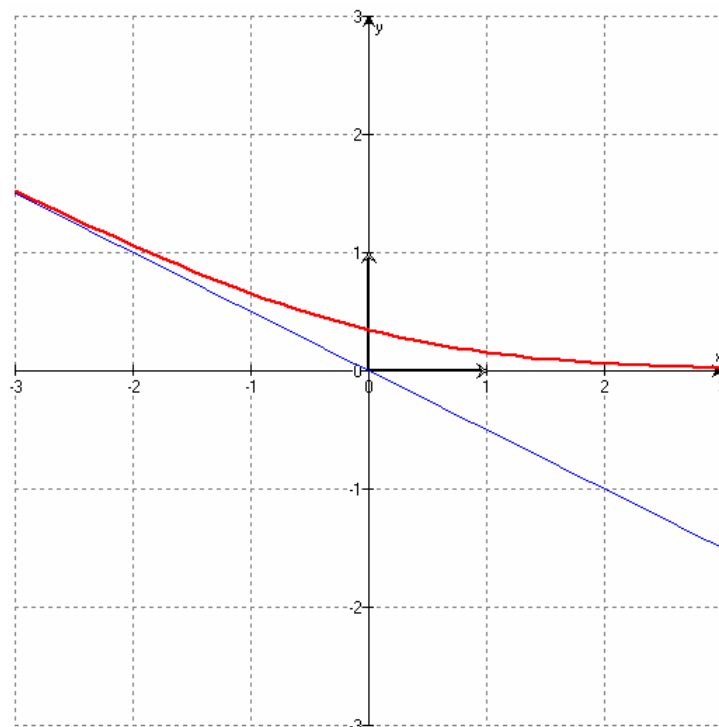
d- • $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \frac{1}{2}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^x)) = 0$ donc la droite Δ est une asymptote oblique à

$\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

$$\bullet f(x) - (-\frac{1}{2}x) = \ln(1 + e^x) \text{ et comme } 1 + e^x > 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

alors $\ln(1 + e^x) > 0$ et par suite $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ .

e- Traçage de $\mathcal{C}_f$ et Δ .



2) a- On pose $h(x) = f(x) - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

h est une fonction continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alors il existe un réel α unique tel que $h(\alpha) = 0$. Or $h(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) = \alpha$.

b- $h(0) = \frac{1}{2} \ln 2 > 0$ et $h(1) = -0,84 < 0$ alors d'après le théorème des valeurs

intermédiaires on a : $0 < \alpha < 1$.

3) a- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$.

Pour tout $x \geq 0$, $1 + e^x \geq 2$ signifie $\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ signifie $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{4}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après les inégalités des accroissements finis : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|$; $x \in \mathbb{R}_+$

Conclusion : pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|$.

4) a- Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \geq 0$; vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après 1)b-

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b- D'après 3)b et pour $x = u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \text{ signifie } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|.$$

c- Pour $n = 0$; $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$, vraie .

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après b) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ et comme $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$\text{donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.