

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
SESSION DE CONTRÔLE – JUIN 2008

Exercice 1 (Q.C.M)

❖ **Contenus :**

- Fonction logarithme népérien.
- Suites réelles.
- Probabilités.

❖ **Aptitudes visées :**

- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Etudier la convergence d'une suite du programme.
- Calculer les caractéristiques d'une variable aléatoire et interpréter les résultats.

❖ **Corrigé :**

- 1) c)
- 2) a)
- 3) b)

Exercice 2

❖ **Contenus :**

- Opérations algébriques sur le corps des complexes, propriétés du conjugué, du module et de l'argument.
- Résolution d'équations de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients complexes.

❖ **Aptitudes visées :**

- Calculer ou transformer des expressions complexes.
- Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe.
- Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul
- Reconnaître que deux vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux, à partir de leurs affixes.
- Résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients complexes.

❖ **Corrigé :**

1) a) $OACB$ est un losange équivaut à $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ et $OA = OB$.

On a $\text{Aff}(\overrightarrow{OA}) = \sqrt{3} + i$ et $\text{Aff}(\overrightarrow{BC}) = 2i - (-\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i$. D'où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

$OA = |\sqrt{3} + i| = 2$ et $OB = |-\sqrt{3} + i| = 2$. Donc $OA = OB$.

Ainsi $OACB$ est un losange.

2) a) (E) : $z^2 - 2iz - 4 = 0$. $\Delta' = 3$.

$z' = i - \sqrt{3}$ et $z'' = i + \sqrt{3}$.

Ainsi $S_1 = \{\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i\}$.

b) $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

3) $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$.

a) $P(2i) = (2i)^3 - 4i(2i)^2 - 8(2i) + 8i = -8i + 16i - 16i + 8i = 0$.

b) $P(z) = (z - 2i)(z^2 + mz + p) \Leftrightarrow P(z) = z^3 + (-2i + m)z^2 + (-2im + p)z - 2ip$.

D'où :

$$\begin{cases} -2i + m = -4i \\ -2im + p = -8 \\ -2ip = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2i \\ p = -4 \end{cases}$$

Ainsi $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2iz - 4)$.

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2iz - 4 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = \sqrt{3} + i$ ou $z = -\sqrt{3} + i$.

Ainsi $S_2 = \{2i; \sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i\}$

Exercice 3

❖ **Contenus :**

- Fonction logarithme népérien : Propriétés, limites usuelles.
- Etude et représentation graphique de fonctions du type $x \mapsto \ln(u(x))$, où u est une fonction du programme.
- Fonction exponentielle : Propriétés, limites usuelles.

❖ **Aptitudes visées :**

- Déterminer la limite éventuelle d'une fonction du programme en un réel ou à l'infini.
- Reconnaître qu'une droite est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction du programme.
- Déterminer une valeur exacte ou approchée d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = k$, dans le cas où f est une fonction continue sur un intervalle.

- Reconnaître si une fonction du programme est dérivable en un point ou sur un intervalle.
- Déterminer la dérivée d'une fonction composée.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction du programme connaissant le signe de sa dérivée.
- Tracer la courbe représentative de la réciproque d'une fonction donnée.

❖ **Corrigé :**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Alors la courbe (C) admet une asymptote d'équation $x = 0$ et une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

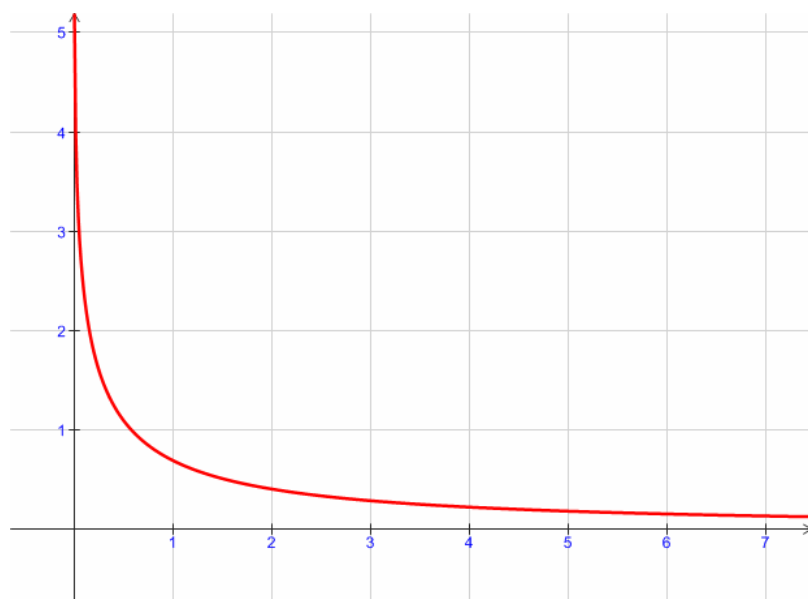
$$2) \text{ a) } f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ et on a } f'(x) = \frac{\left(\frac{-1}{x^2} \right)}{\left(\frac{x+1}{x} \right)} = \frac{-1}{x(x+1)}.$$

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[; x(x+1) > 0$.

Alors pour tout $x \in]0; +\infty[; f'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
f	$+\infty$	0

3)



- 4) a) f étant continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, alors f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \in]0; +\infty[$, alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$ que l'on notera x_n .
- b) $f(x_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{x_n}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}$.
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)} = 1$

Exercice 4

❖ Contenus :

- Vecteurs de l'espace.
- Produit vectoriel dans l'espace.
- Droites et plans de l'espace, équations, position relative.
- Sphère, section d'une sphère par un plan.

❖ Aptitudes visées :

- Exploiter les opérations sur les vecteurs de l'espace.
- Exploiter les propriétés du produit vectoriel dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Déterminer la section d'une sphère par un plan.

❖ Corrigé :

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et par suite $ABCD$ est un parallélogramme.

Aire $(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 9\sqrt{2}$.

2) a) $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

b) Comme $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, alors la droite (AI) est perpendiculaire au plan P .

De plus $AI = \frac{1}{3} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 3\sqrt{2}$.

Alors le plan P est tangent à la sphère S au point A .