MATHÉMATIQUES

Section : Sciences Expérimentales

Session principale : juin 2015

<u>Exercice 1</u> (Thèmes : produit vectoriel ; droite dans l'espace ; sphère)

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. donc les points A, B et C ne sont pas alignés par suite ils déterminent un plan.

b) $1+1+0-2=0$ donc $A\in(P)$.

$1-1+2-2=0$ donc $B\in(P)$.

$0+1+1-2=0$ donc $C\in(P)$.

Il en résulte que $x+y+z-2=0$ est une équation de (P).

c) $1+1+4-2=2\neq 0$ donc $D\notin(P)$.

2/ a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=1-1=0$ donc $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CA}$ par suite le triangle ABC est rectangle en C.

b) le triangle ABC est rectangle en C et $H=A*B$ donc c'est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un normal à (P) donc il est directeur de Δ de plus le point $H=A*B$ donc $H(1,0,1)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha \quad ;\ \alpha\in IR.\\ z=1+\alpha\end{cases}$

4/ a) Le point H est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC et Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et puisque M est un point de Δ donc $MA=MB=MC$.

Ou bien : $M\in\Delta$ donc $M(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$.

$\begin{cases}MA^2=\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2\\ MB^2=\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2\\ MC^2=(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2+\alpha^2\end{cases}$ donc $MA=MB=MC$.

b) $I\in\Delta$ donc $I(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$ $IA=ID\Leftrightarrow IA^2=ID^2\Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2=(\alpha-3)^2\Leftrightarrow\alpha=1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2,2,2)$ de Δ tel que $IA=ID$.

c) Le point $I\in\Delta$, d'après a) et b), $IA=IB=IC=ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA=\sqrt{5}$.

Exercice 2 (Thème : Nombres complexes)

1/ a) $|a| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ donc $A \in (C)$.

b) Il suffit de tracer la droite d'équation $x = 1$ et de remarquer que $(\mathrm{Im}(a) > 0)$.

2/ a) $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2 + 24i\sqrt{2} = -12 + 24i\sqrt{2} = 12\left(-1 + 2i\sqrt{2}\right) = 12a^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}\left(1 + i\sqrt{2}\right)$.

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i - 1 - i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[-1 + i\left(1 - \sqrt{2}\right)\right].$$

$$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i + 1 + i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

3/ a) $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = i\sqrt{3} = z_K$ donc $K = M_1 * M_2$.

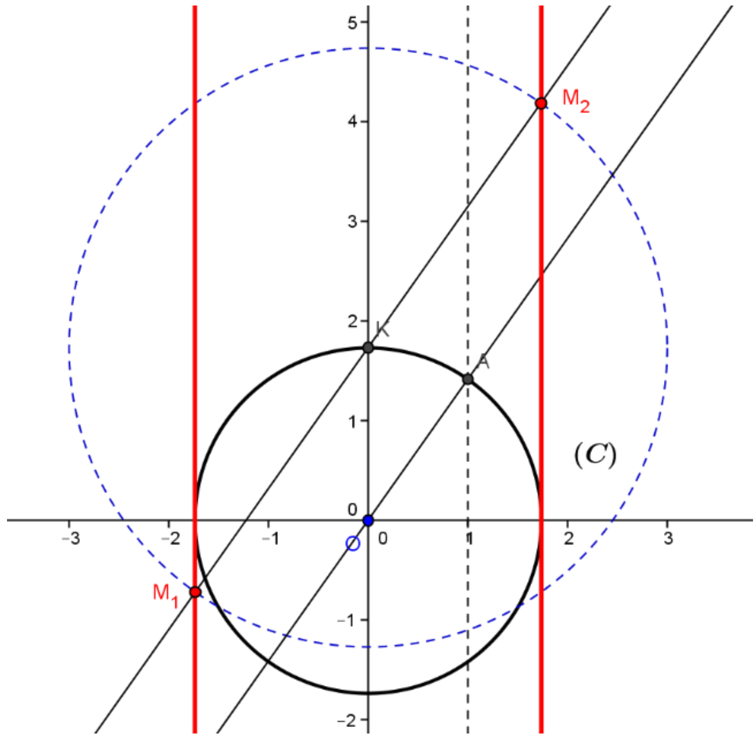
b) $$\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{2\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6}\right)}{\left(1+i\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires donc $(M_1M_2) \parallel (OA)$.

c) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2i\sqrt{6}\right| = \sqrt{36} = 6$.

d) Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et le cercle de centre K et de rayon 3.

Ou bien : Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.



<u>Exercice 3</u> (Thème : statistique à deux variables)

1/ a) $r = \dfrac{\mathrm{cov}(t,C)}{\sigma_t\sigma_C} = 0.99998.$

b) $r = 0.99998$, il y a une très forte corrélation $\left(|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

c) $C = bt + a$ avec $b = \dfrac{\mathrm{cov}(t,C)}{\sigma_t^2} = 23.19$ et $a = \overline{C} - b\overline{t} = 1.68.$ Ainsi $C = 23.19t + 1.68.$

d) Pour $t = 188$, on obtient $C = 4361.4\ \mathrm{cm}^3.$

2/ a) $C = \alpha t + 40\beta + 745.$

b) On sait que $C = 23.19t + 1.68 = \alpha t + 40\beta + 745$ par identification $\alpha = 23.19$ et $\beta = \dfrac{1.68 - 754}{40} = -18.808.$

3/ $C = 23.19t - 18.808g + 745.$ Pour $g = 50$ et $t = 188$, on obtient $C = 4173.32\ \mathrm{cm}^3.$

<u>Exercice 4</u> (Thèmes : variation d'une fonction ; bijection ; notion d'aire)

1/ a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite $y = x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$ le signe est celui de $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	|| +	0	−
Positions	|| $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ		$\mathscr{C}$ est en dessous de Δ

2/ a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}.$

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	|| −	0	+
$\ln x$	|| −	0	+

c) Pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0.$

Pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) > 0.$

d) On a $f'(1) = 0$ de plus pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) > 0.$

Il en résulte que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0.$

e)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$		$+\infty$

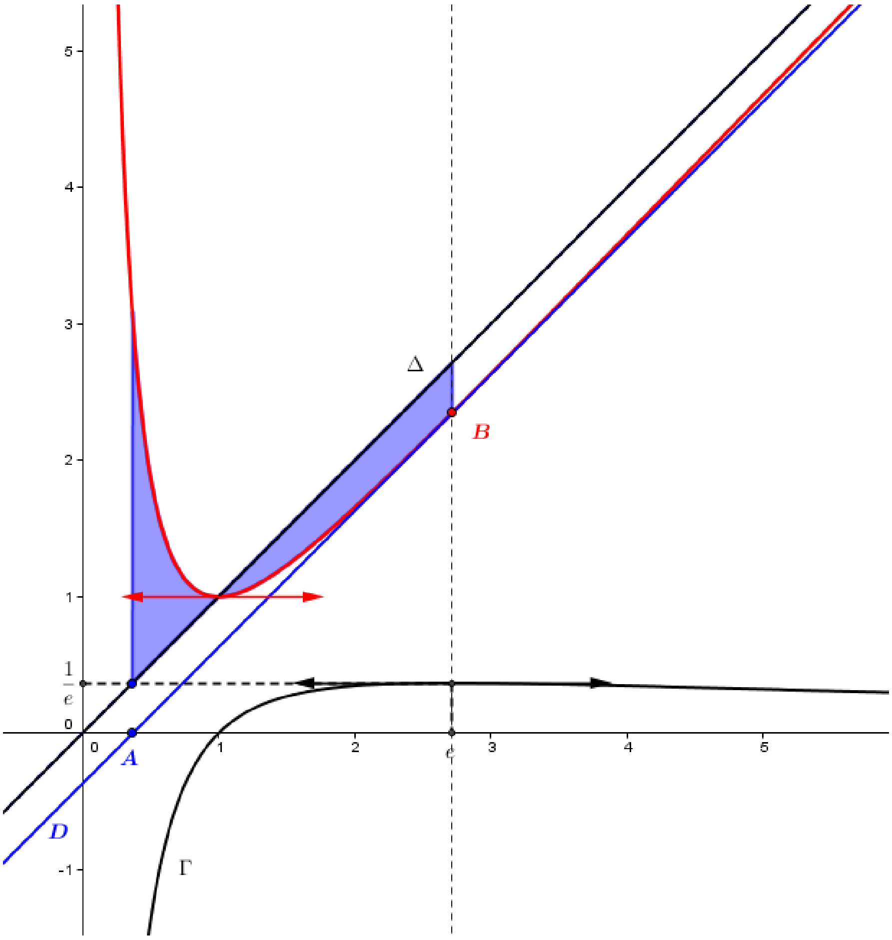
3/ a) $D \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=1 \\ ]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ ]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = e$. On en déduit qu'il existe une unique tangente D à $\mathscr{C}$ au point $B\left(e, e-\dfrac{1}{e}\right)$.

b) $D : y = f'(e)(x-e) + f(e) = x - \dfrac{1}{e}$.

4/ a) $D : y = x - \dfrac{1}{e}$. Pour $x = \dfrac{1}{e}, y = 0$ donc $A \in D$.

b) $D \parallel \Delta$ et passe par A.

c)



5/ $A = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left| f(x) - x \right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{-\ln x}{x} dx + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$

$$=\left[-\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e}=1\text{ua.}$$