Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

Session de contrôle 2016

Exercice 1

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

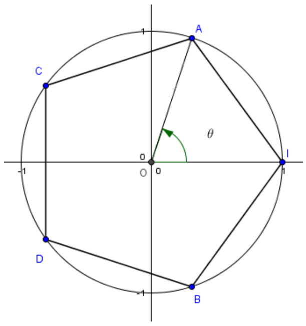
2) a) $A_{OIJ}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right\|=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

b) $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $V_{OIJ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OE}\right|=\frac{1}{8}$.

c) La distance EH est la langueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ}=\frac{1}{3}\times A_{OIJ}\times EH$ donc $EH=\frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que $d\left(E,(OIJ)\right)=EH=\frac{\sqrt{21}}{7}=R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.



Exercice 2

1) a) $a=e^{i\theta}$, $\bar{a}=e^{-i\theta}$, $a^2=e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^2=e^{-2i\theta}$.

b) Voir figure.

2) a) $a+\bar{a}=2\,\mathrm{Re}(a)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) $a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1=a^2-a\left(a+\bar{a}\right)+1=a^2-a^2-\left|a^2\right|+1=0$ ce qui prouve que a est solution de l'équation (E).

$\bar{a}^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a}+1=\overline{a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1}=0$ ce qui prouve que $\bar{a}$ est solution de l'équation (E).

3) a) $(z-1)\left(z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)\left(z^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)=(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=z^5-1$.

b) En changeant z par a dans a), on obtient $a^5-1=(a-1)\left(a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)\left(a^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)$

et puisque a est solution de l'équation (E) donc $\left(a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)=0$, il en résulte que

$a^5-1=0 \Leftrightarrow a^5=1$ ou encore a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k\in\{1,2,3,4\}$.

b) $\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{5}>0\\ \sin\frac{2\pi}{5}>0\end{cases}$, $\operatorname{Im}(1)=0$, $\cos\frac{4\pi}{5}<0$, $\cos\frac{6\pi}{5}<0$ et $\sin\frac{8\pi}{5}<0$. Il en résulte que $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives.

c) On sait que a est une racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives, d'après b), $a=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

5) Les affixes respectives des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C).

<u>Exercice 3</u>

1) a) Puisqu'il y a exactement 3 microscopes défectueux donc le premier microscope non défectueux est obtenu au plus au quatrième choix, on en déduit que $n\le 4$.

b) $p_1=\frac{7}{10}$ et $p_2=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

c) $p_3=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$ et $p_4=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120}$.

2) a) Les valeurs prises par X sont $\{1,2,3,4\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

b) $E(x)=\sum_1^4 x_ip_i=1\times\frac{7}{10}+2\times\frac{7}{30}+3\times\frac{7}{120}+4\times\frac{1}{120}=\frac{46}{120}=\frac{23}{60}=0.38.$

3) a) $p(Y\le T)=1-e^{-\lambda T}$.

b) $p(Y\ge 5)=1-p(Y\le 5)=e^{-5\lambda}=0.7\Leftrightarrow -5\lambda=\ln 0.7\Leftrightarrow \lambda=-\frac{\ln 0.7}{5}=0.071.$

c) $p(Y\ge 10\setminus Y\ge 5)=\frac{p((Y\ge 10)\cap(Y\ge 5))}{p(Y\ge 5)}=\frac{p(Y\ge 10)}{p(Y\ge 5)}=e^{-5\times 0.071}=0.701.$

<u>Exercice 4</u>

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, il en résulte que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Si $x\in]0,1[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0$, il en résulte que $x<\frac{1}{x}$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}>0$, il en résulte que $x>\dfrac{1}{x}$.

c) Si $x \in]0,1[$, $x<\dfrac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)<g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $x>\dfrac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)>g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x-2+\dfrac{2}{x}\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\dfrac{2}{x}\right)e^x+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=+\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$ La droite $x=0$ est une asymptote de (C_f).

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$. La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ en $+\infty$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=x^2e^x-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\dfrac{1}{x}\right).$

b) $f'(1)=g(1)-g(1)=0.$

c)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty \searrow$	$2e$	$\nearrow +\infty$	

4) a) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)-h(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x>0$ car $x^2-2x+2>0$, $(\Delta=-4)$. Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (C_h).

b) Voir figure.

5) a) $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=\int_1^x\left(t^2-2t+2\right)e^t dt=\int_1^x\left(t^2+2t\right)e^t dt+2\int_1^x e^t dt-4\int_1^x te^t dt$

$=\left[g(t)\right]_1^x+2\left[e^t\right]_1^x-4\int_1^x te^t dt=x^2e^x-e+2e^x-2e-4\int_1^x te^t dt=x^2e^x+2e^x-3e-4\int_1^x te^t dt$

On pose $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(x)=e^t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u(x)=1\\ v(x)=e^t\end{cases}$

$\int_1^x te^t dt=\left[te^t\right]_1^x-\int_1^x e^t dt=xe^x-e-\left[e^t\right]_1^x=xe^x-e^x.$

Donc $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=\ x^2e^x+2e^x-3e-4\left(xe^x-e^x\right)=\left(x^2-4x+6\right)e^x-3e.$

b) $A_\alpha = \int_\alpha^1 \left(f(t) - h(t)\right)dt = 3e - \left(\alpha^2 - 4\alpha + 6\right)e^\alpha.$

$\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A_\alpha = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} 3e - \alpha^2 e^\alpha - 4\alpha e^\alpha + 6e^\alpha = 3e.$