Devoir de contrôle n°1	Niveau : 4 sciences expérimentales Epreuve : Mathématiques

Exercice 1 :(3 points)

Répondre par vrai ou faux (On ne demande aucune justification)

1) Les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ sont adjacentes

2) Soit une suite (u_n) dont aucun terme n'est nul. On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{-2}{u_n}$

Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

3) Si g est le prolongement par continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$ alors $g(3) = 2$

4) $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=0$

Exercice 2 :(6 points)

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur IR\ $\{1\}$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 2.

Les droites d'équations respectives $\Delta: y = \frac{-5}{4}x + \frac{3}{4}$ $D: y = -2$ et $D': x = 1$ sont les asymptotes à(C).

1) Par lectures graphiques et sans justification:

a) Déterminer $f'(0), f'(2)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(2)$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + \frac{5}{4}x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Déterminer $f(]1,+\infty[)$ et $f(]-\infty,1[)$ et $f([2+\infty[)$

d) Donner le tableau de signe de f' la fontion dérivée de f

2) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = fof(x)$ on note (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé

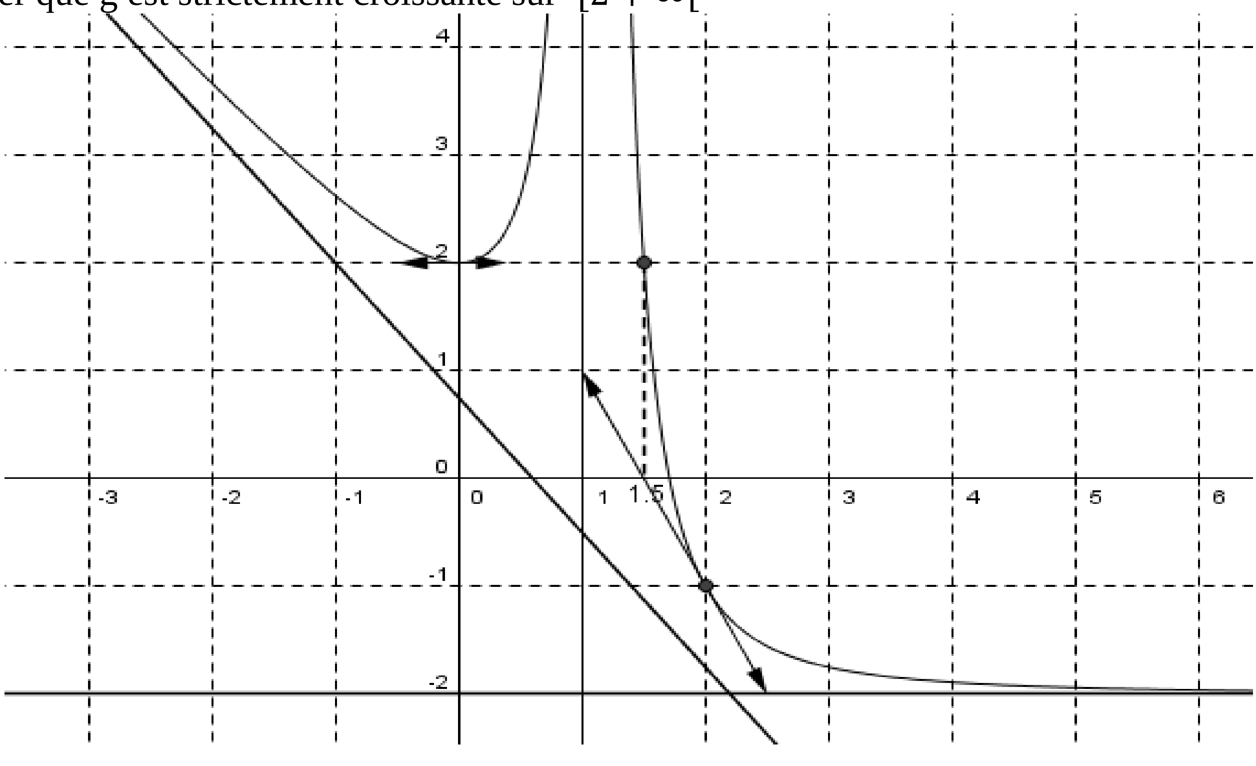
a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g

b) Déterminer en justifiant votre réponse : $g(0)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) On admet que g est dérivable sur son domaine de définition

Montrer que (C_g) admet une tangente horizontale au point $A(0,-1)$

d) Montrer que g est strictement croissante sur $[2+\infty[$



Exercice 3 :(5points)

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthonormé les courbes(Γ) et (C) respectivement d'une fonction f dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f' ainsi que les droites $\Delta: y = x$ et $D: y = -0.5$

1) Utiliser le graphique pour justifier que :

a) $f([1,2]) \subset [1,2]$

b) L'équation $f(x) = x$ admet dans $[1,2]$ une solution unique α qu'on donnera une valeur approchée

c) Pour tout $x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

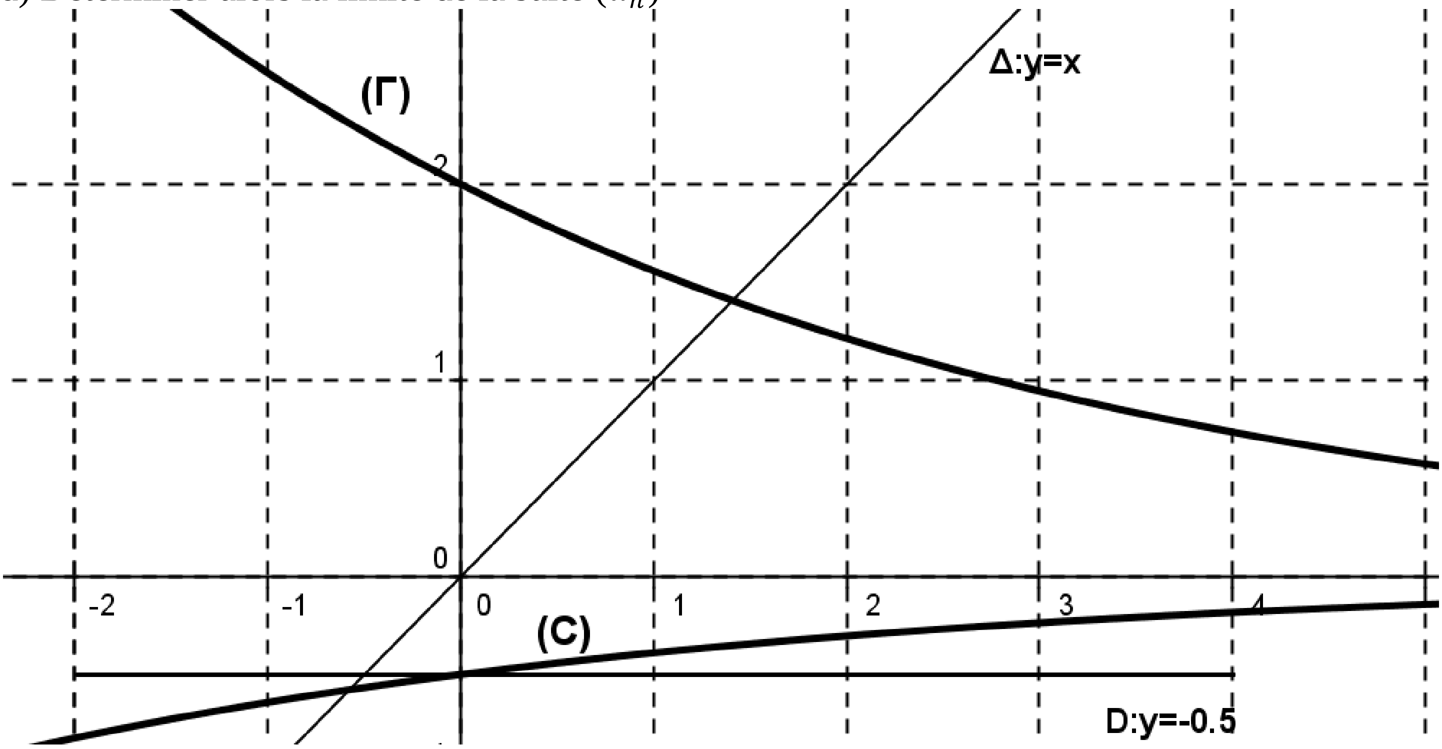
2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - \alpha)$

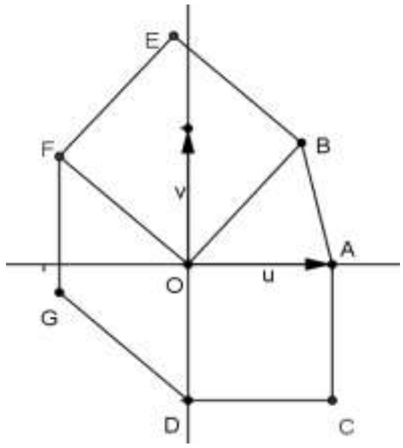
d) Déterminer alors la limite de la suite (u_n)



Exercice 4 :(6points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe $\alpha = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On construit à l'extérieur du triangle OAB les carrés directs ODCA et OBEF, comme indiqué sur la figure ci-contre.



1) Déterminer les affixes des points C et D.

2) a) Montrer que l'affixe du point F est $z_F = i\alpha$.

b) En déduire que l'affixe du point E est $z_E = (1 + i)\alpha$

c) Ecrire z_E sous forme exponentielle

3) Le quadrilatère OFGD est un parallélogramme.

Démontrer que l'affixe du point G est égal à $i(\alpha - 1)$.

4) En déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle

5) Dans la suite, on prend $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

a) Montrer que $i + \alpha = 2\cos\frac{\pi}{20} e^{i\frac{9\pi}{20}}$

b) En déduire sous forme exponentielle l'affixe du vecteur $\overrightarrow{EG}$.

CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

1)faux

2)vrai

3)vrai

4)vrai

EXERCICE2

1)a) f ‘ (0)=0 car c’est une tangente horizontale

soit A(2 ;-1) et B(1 ;1) deux point de la tangente en 2

donc $f'(2) = \frac{1+1}{1-2} = -2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \ \ et\, f(2) = -1$

b)puisque la $droite\ \Delta : y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}\ est\ une\ asymptote\ a\ la\ courbe\ au$

$voisinage\ de - \infty\ donc\ \lim_{x\to-\infty} f(x) - y = 0\ donc$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) + \frac{5}{4}x = \frac{3}{4}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2\ puisque\ la\ droite$

$D: y = -2\ est\ une\ asymptote\ a\ la\ courbe$

c)$f(]1; +\infty[) =]-2, +\infty[\ ; f([2, +\infty[) =]-2, -1]$

d)$f\ est\ decroissante\ sur\ ]-\infty\ ; 0]et\ sur\ ]1, +\infty[\ donc$

$f'(x) \leq 0\ et\ croissante\ sur\ [0; 1[\ \ donc\ \ f'(x) \geq 0$

2)$la\ droite\ D_1 : y = 1\ coupe\ la\ courbe\ en\ un\ seul\ points\ d'abscisse$

$\alpha\ dans\ [\frac{3}{2}\ ; 2[\ donc$

$f(x) = 1\ admet\ une\ seule\ solution\ dans\ l'intervalle\ [\frac{3}{2}; 2[$

3) $a) on\ a\ D_f = IR - \{1\}\ et\ que\ f(\alpha) = 1$;

$x \neq 1 \ \Rightarrow f(x) \neq f(1) et g(x) \neq f\big(f(\alpha)\big) = f(1)$

b)$on\ a : f(0) = 2\ donc\ g(0) = f(2) = -1\ et\ puisque$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ \ donc\ \ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$c) on\ a : g(0) = -1\ \ donc\ g'(0) = (fof)'(0) =$

$f'\big(f(0)\big) \times f'(0) =$
$0\ donc\ C_g\ admet\ en\ A(0,-1) une\ tangente\ horizontale$

d)sur [2;+∞[

g'(x)=f'(f(x))× $f'(x)$

f(x)<0 et f est decroissante donc f'(x)<0 donc g'(x)>0

alors g est croissante

EXERCICE3

1)a) $f([1,2]) \subset [1,2]\ car\ f\ est\ decroissante\ et\ que$

$f(1) = a\ et\ f(2) = b\ \ et\ a > b\ \ ; 1 < a < 2, 1 < b < 2$

b) $la\ courbe\ \boldsymbol{\Gamma\ de\ f\ coupe\ la\ droite}$

$\Delta: \boldsymbol{y = x\ en\ un\ seul\ point\ dont\ l'abscisseest\ dans}\ [\mathbf{1}; \mathbf{2}]\boldsymbol{donc}$

$\boldsymbol{l'equation\ f(x) = x\ admet\ une\ seule\ solution\ dans}\ [\mathbf{1}; \mathbf{2}]$

x≈ $\mathbf{1,5}$

c)$sur\ la\ courbe\ (C) de\ f'on\ remarque\ que\ les\ ordonnees$

$des\ points\ dont\ l'abscisse\ est\ dans\ [1,2] sont\ dans$

$\left[-\frac{1}{2}; 0\right] donc\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$2)a)$ $pour\ n = 0\ on\ a : 1 \leq 2 \leq 2\ \ vrai\ supposons\ que\ pour\ n \geq 1$;

$1 \leq u_n \leq 2\ \ et\ puisque\ \forall x \in [1;2]\ on\ a : 1 \leq f(x) \leq 2\ et\ que$

$u_{n+1} = f(u_n)\ donc\ 1 \leq u_{n+1} \leq 2\ \ d'ou\ \forall n \in IN\ ; 1 \leq u_n \leq 2$

b) $d'apresle\ corollaire\ du\ \ TAF\ et\ que\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\ \ \ et\ que$

$f(\alpha) = \alpha\ dans\ [1;2]\ alors\ \left|\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| \leq \frac{1}{2}\ d'ou$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c)$d'apres\ b)\ \ on\ a :\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\ |u_{n-1} - \alpha|$

$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-2} - \alpha|$

………………………………………

………………………………………..

$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|2 - \alpha|\ car\ u_0 = 2$

En multipliant membre à membre et après simplification

Ona : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - \alpha|\ or\ \alpha \leq 2\ donc\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - \alpha)$

d)$0 < \frac{1}{2} < 1\ donc\ \ \lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0\ donc\ \ \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

EXERCICE4

1)$OC = \sqrt{2}\ \ et\ que\ \overrightarrow{OC} = \vec{u} - \vec{v}\ donc\ z_C = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = 1 - i\ \ et\ que\ z_D = -i$

$2)a)\ B\ et\ F\ sont\ symetrique\ par\ rapport\ (O;\vec{v})\ donc$

$z_F = re^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)} = e^{\frac{i\pi}{2}}\alpha = i\alpha$

$b)on\ a: z_B = z_{\overrightarrow{FE}} = z_E - z_F$

$donc\ z_E = z_B + z_F = \alpha + i\alpha = (1+i)\alpha$

$c) on a : 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\ donc\ z_E = \sqrt{2}re^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

$3) puisque\ OFGD\ est\ un\ parallelogramme\ donc\ \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$

$donc\ z_G = z_F + z_D = i\alpha - i = i(\alpha - 1)$

$4) GE = |z_G - z_E| = |i(\alpha-1) - (1+i)\alpha| = |i+\alpha|$

$GC = |i(\alpha-1) - (1-i)| = |i\alpha - 1| = |i(\alpha+i)|$

$= |i+\alpha|\ puisque\ |i| = 1$

Donc le triangle GEC est isocele en G

$5)a)\ on\ a : 2cos\frac{\pi}{20}e^{i\frac{9\pi}{20}} = \left(e^{i\frac{\pi}{20}} + e^{-i\frac{\pi}{20}}\right)e^{i\frac{9\pi}{20}} = e^{i\frac{10\pi}{20}} + e^{i\frac{8\pi}{20}} =$

$e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} = i + \alpha$

b) $z_{\overrightarrow{EG}} = z_G - z_E = 1 + \alpha = 1 + e^{2\frac{i\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{-i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{5}}e^{i\frac{\pi}{5}} =$

$e^{i\frac{\pi}{5}}\left(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{-i\frac{\pi}{5}}\right) = 2\cos(\frac{\pi}{5})e^{i\frac{\pi}{5}}$