Devoir de Contrôle N°1

Niveau : 4Sc-Exp
Durée : 2 heures

Mathématiques

Exercice N°1

(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie . Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 1 point , une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point .

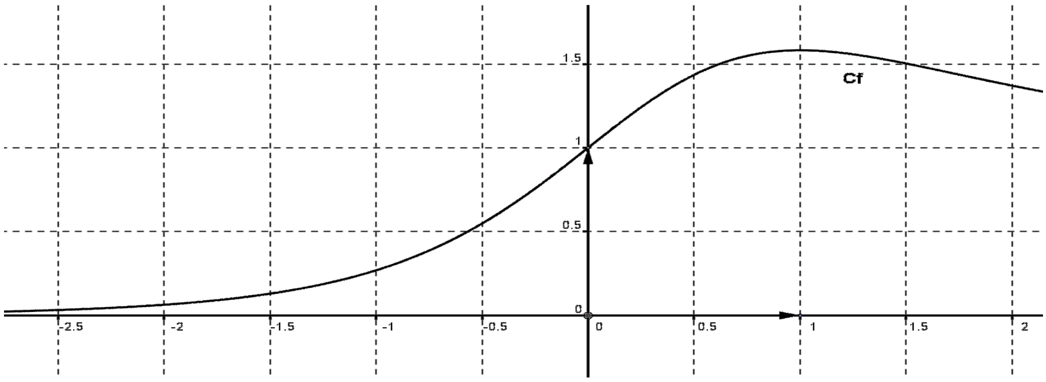
❶ La partie imaginaire du nombre complexe $z=(1-i)^2$ est :

a) -2 b) -2i c) -1

❷ On considère une suite (U_n) <u>convergente</u> définie sur $\mathbb{N}$ et on définit la suite (V_n) par : $V_n=\dfrac{-2}{U_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la suite (V_n) est :

a) Convergente b) divergente c) on ne peut rien dire

❸ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont sa courbe représentative est donnée ci-dessous



alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{-x^2+3x-1}{x+5}\right)=$

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

Exercice N°2

(6 points)

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par:

$\begin{cases}U_0=1\\V_0=2\end{cases}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\dfrac{3U_n+V_n}{4}$, $V_{n+1}=\dfrac{U_n+3V_n}{4}$

❶ Calculer U_1 et V_1

❷ On pose pour tout entier n: $W_n=U_n-V_n$

a) Prouver que (W_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) En déduire que pour tout entier n , $U_n<V_n$

❸ a) Etudier la monotonie de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

b) En déduire que pour tout entier n, $U_n \geq 1$ et $V_n \leq 2$.

c) Justifier que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L .

❹ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n = U_n + V_n$

a) Prouver que (A_n) est une suite constante .

b) Calculer alors L.

Exercice N°3

(6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle J le point d'affixe i.

❶ On considère les points A, B, C, H d'affixes respective $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ *et* $h = -2$

Placer ces points sur une graphique, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

❷ Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

❸ Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe : $\dfrac{b-c}{h-a}$.

En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

❹ On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G

Placer G sur la figure .

❺ Montrer que les points : G, J et H sont alignés.

❻ On note A' le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

a) Déterminer l'affixe du point K.

b) Démontrer que le quadrilatère KHA'J est un parallélogramme.

Exercice N°4

(5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

❶ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

❷ Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $\dfrac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

❸ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

❹ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

❺ Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & si\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2} & si\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Bon travail

CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

1)a 2)a 3)a

EXERCICE2

1)$u_1 = \frac{3u_0+v_0}{4} = \frac{5}{4}$; $de\ meme\ v_1 = \frac{7}{4}$

2)$a)\ \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}-v_{n+1}}{u_n-v_n} = \frac{\frac{2(u_n-v_n)}{4}}{u_n-v_n}$

$= \frac{1}{2}\ \ donc\ (w)est\ une\ suite\ géométrique\ de\ raison\frac{1}{2}$

b)$on\ a\ u_0 < v_0\ supposons\ que\ u_n < v_n\ pour\ tout\ n \geq$
$1\ \ et\ montrons\ que\ u_{n+1} < v_{n+1}\ \ en\ effet\ u_{n+1} - v_{n+1} = w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n =$
$\frac{1}{2}(u_n - v_n) < 0\ (car\ on\ a\ supposé\ que\ u_n < v_n)donc$

$u_{n+1} < v_{n+1}\ d'ou\ \ pour\ tout\ entier\ n\ ona:\ u_n < v_n$

3)a) <u>etude de u_n</u>

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}(u_n - v_n) > 0$

$donc\ u_{n+1} > u_n\ \ d'ou(u)est\ croissante\ et\ minoré\ par\ 1$ donc $u_n \geq 1$

<u>Etude de v_n</u>

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) < 0\ donc\ v_{n+1} <$
$v_n\ d'ou(v)est\ decroissante\ \ \ et\ donc\ v_n \leq v_0 = 2$

b) voir (a)

c) (u) et (v) sont convergentes si (u) converge vers une limite l

et (v) converge vers l'

alors $l = \frac{3l+l\prime}{4}\ et\ l' = \frac{l+3l\prime}{4}\ \ donc\ l = l'$

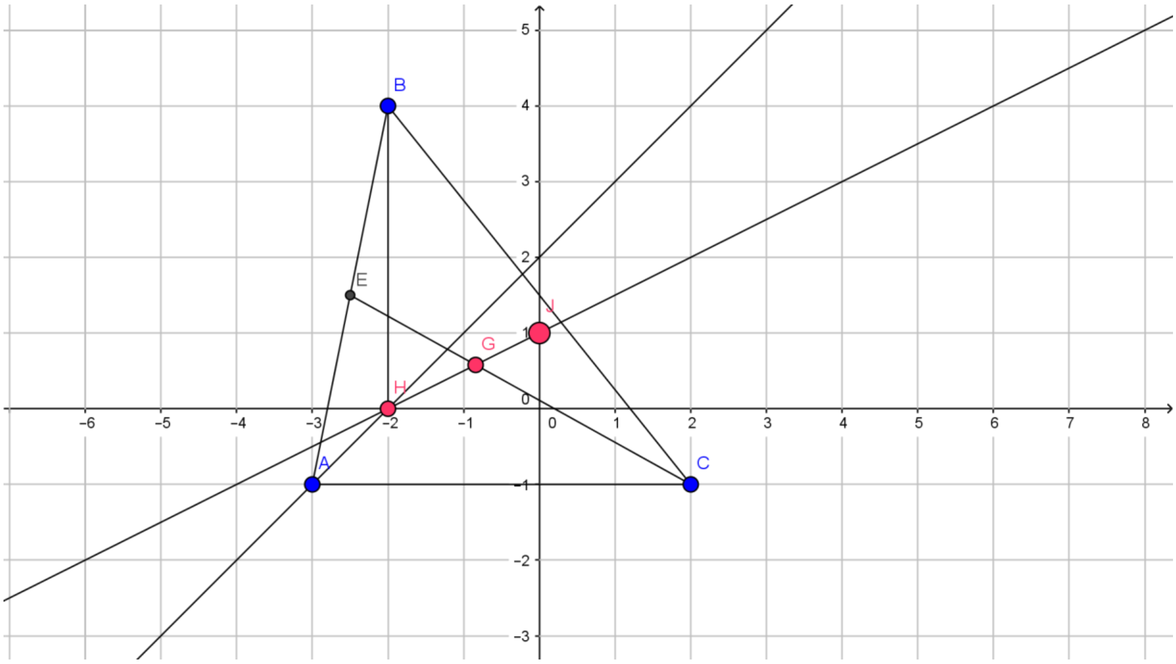
4)a)$A_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = A_n\ ; d'ou$

$(A_n) est\ constante = A_0 = u_0 + v_0 = 3$

b)$on\ a : l + l = A_0 = 3\ donc\ l = \frac{3}{2}$

EXERCICE3

1)



2)$JA = |-3 - i - i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$,

$JB = |-2 + 4i - i| = \sqrt{13} =$
$JC\ \ donc\ J\ est\ le\ centre\ du\ cercle\ passant\ par\ A, B\ et\ C$

3)$\frac{b-c}{h-a} = \frac{-2+4i-3+i}{-2+3+i} = \frac{-5+5i}{1+i} = \frac{5(-1+i)}{1+i} = \frac{5(-1+i)(1-i)}{2} = 5i$

Imaginaire pur $donc\ les\ vecteurs\ \overrightarrow{HA}\ et\ \overrightarrow{CB}\ sont\ orthogonaux$

Alors les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires

4)$soit\ E\ le\ milieu\ de\ [AB]\ alors\ z_E = \frac{a+b}{2} = \frac{-3-i-2+4i}{2} =$
$\frac{-5}{2} + \frac{3}{2}i\ \ donc\ E\left(-\frac{5}{2}\ ; \frac{3}{2}\right)\ \ donc\ \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}\ d'ou$

$g - c = \frac{2}{3}(e - c) alors\ g = -\frac{2}{3}(1 - i)$

5) $z_{\overrightarrow{GH}} = h - g = -2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i$;

$z_{\overrightarrow{GJ}} = j - g = i - \frac{2}{3}i + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ *on deduit alors que*

$z_{\overrightarrow{GH}} = -2z_{\overrightarrow{GJ}}$ *d'ou les points G; J et H sont alignes*

6)a)) $k = \frac{a+h}{2} = \frac{-5-i}{2}$

b) $z_{\overrightarrow{KH}} = h - k = -2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1-i)$ *et* $z_{\overrightarrow{JA'}} = a' - i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

donc KHA'J est un parallelogramme

EXERCICE4

1) $f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+x+2}-x)(\sqrt{x^2+x+2}+x)}{\sqrt{x^2+x+2}+x} =$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad pour\ x \geq 1$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1)} = \frac{1}{2}$

2) $pour\ x < -1\ on\ a : f(x) - \frac{x+1}{x-1} = \frac{\cos(\pi x)-1}{x-1}\ \ on\ a\ x-1 < 0$

$et \cos(\pi x) - 1 < 0\ donc\ \ \frac{x+1}{x-1} \leq f(x)\ \ maintenant\ \ f(x) - 1 = \frac{\cos(\pi x)-1}{x+1}\ or$

$\cos(\pi x) - 1 < 0\ et\ x+1 > 0\ donc\ f(x) \leq 1\ d'oule\ resultat$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1\ \ donc\ 1 \leq \lim_{x\to-\infty} f(x) \leq 1\ donc\ l = 1$

$on\ a : cos\pi = -1\ donc\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

$3) on\ a : \lim_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{4} - 1 = 1\ et\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1\ \ donc\ \ f$

$est\ continue\ en\ 1$

La continuite en tout point autre que 1 est evidente don f est

Continue sur IR

$4) 0 < 1\ donc\ \ f(x) = 0\ et\ puisque\ f\ est\ continue\ sur\ IR$

$en\ particulier\ sur\ ]-\frac{1}{2}; 0[\ , f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} > 0$

$et\ que\ f(0) = -1 < 0\ \ donc$

$l'equation f(x) = 0\ admet\ au\ mons\ une\ solution\ \alpha$

$on\ a : \dfrac{\alpha + \cos(\pi\alpha)}{\alpha - 1} = 0\ donc\ \ donc \cos(\pi\alpha) = -\alpha\ \ d'ou\ cos^2(\pi\alpha) = \alpha^2 =$

$1 - sin^2(\pi\alpha)\ par\ suite\ sin^2(\pi\alpha) = 1 - \alpha^2$

$mais\ -\frac{1}{2} < \alpha < 0\ donc\ \frac{-\pi}{2} < \pi\alpha < 0\ donc\ le\ sinus\ est$

$negatif\ \ d'ou \sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

$5) on\ a :\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{cosx} = +\infty\ \ donc \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ \ g(x)}{} = \frac{1}{2}\ et\ le\ reste\ est\ evident$