Devoir de synthèse n°1

Classe:$4SC$ Durée : $2H$

EXERCICE 1($4pts$)

Une seule réponse proposée est correcte, aucune justification n'est démandée.

1. z et z' deux nombres complexes non nuls. $|z| = |z'|$ équivaut à

   a) $z = z'$ b) $z = z'$ ou $z = -\, z'$ c) $\dfrac{z}{z'} = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Soit $z = 1 + e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors la forme exponentielle de z est:

   a) $2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\dfrac{\alpha}{2}}$ b) $-2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\dfrac{\alpha}{2}}$ c) $2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\dfrac{\alpha}{2}}$

3. Soit $z = 2i\left(\sin\dfrac{\pi}{12} + i\cos\dfrac{\pi}{12}\right)$ on a :

   a) $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{12}\,[2\pi]$ b) $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ c) $\arg z \equiv \dfrac{11\pi}{12}\,[2\pi]$

4. On pose $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}$,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.On a:

   a) (u_n) est divergente b) (u_n) est croissante c) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

EXERCICE 2($4pts$)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{8 + 2u_n^2} \ ,\forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1

   (b) Montrer que $0 < u_n < 2$,$\forall n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} :\ (2 - u_{n+1}) \leq \dfrac{2}{3}(2 - u_n)$

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - 2| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   (c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 3($6pts$)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

1. (a) Déterminer D_f

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2. (a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1.

   (b) Intérpreter géometriquement les résultas obtenus

3. (a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

(b) Montrer que $\begin{cases} f'(x) < 0 \ , \forall\ x < -1 \\ f'(x) > 0 \quad , \forall\ x > 1 \end{cases}$

(c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1, +\infty[$

(a) Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Calculer $g^{-1}(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'(2)$.

(c) Etudier la dérivabilité de g^{-1} et tacer $(C_{g^{-1}})$.

5. Soit h la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = g\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

(a) Montrer que $h(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$, $\forall\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

(b) Montrer que h est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$sur un intervalle Kque l'on précisera.

(c) Montrer que h^{-1}est dérivable sur K et $\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$

EXERCICE 4($6pts$)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. (a) Vérifier que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\dfrac{\pi}{6}}$ est une racine quatérième de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

(b) Ecrire alors sous forme algébrique les racines quatérième de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

2. Soit $f(z) = z^2 - (-1 + 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3}$, $\forall \in \mathbb{C}$

(a) Calculer $f(1)$

(b) En déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^8 - (-1 + 2i\sqrt{3})z^4 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

3. Soient les points $A(1)$, $B(-2 + 2i\sqrt{3})$ et $C(c)$ avec c le nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ et dont la partie réelle est $\dfrac{5}{2}$.

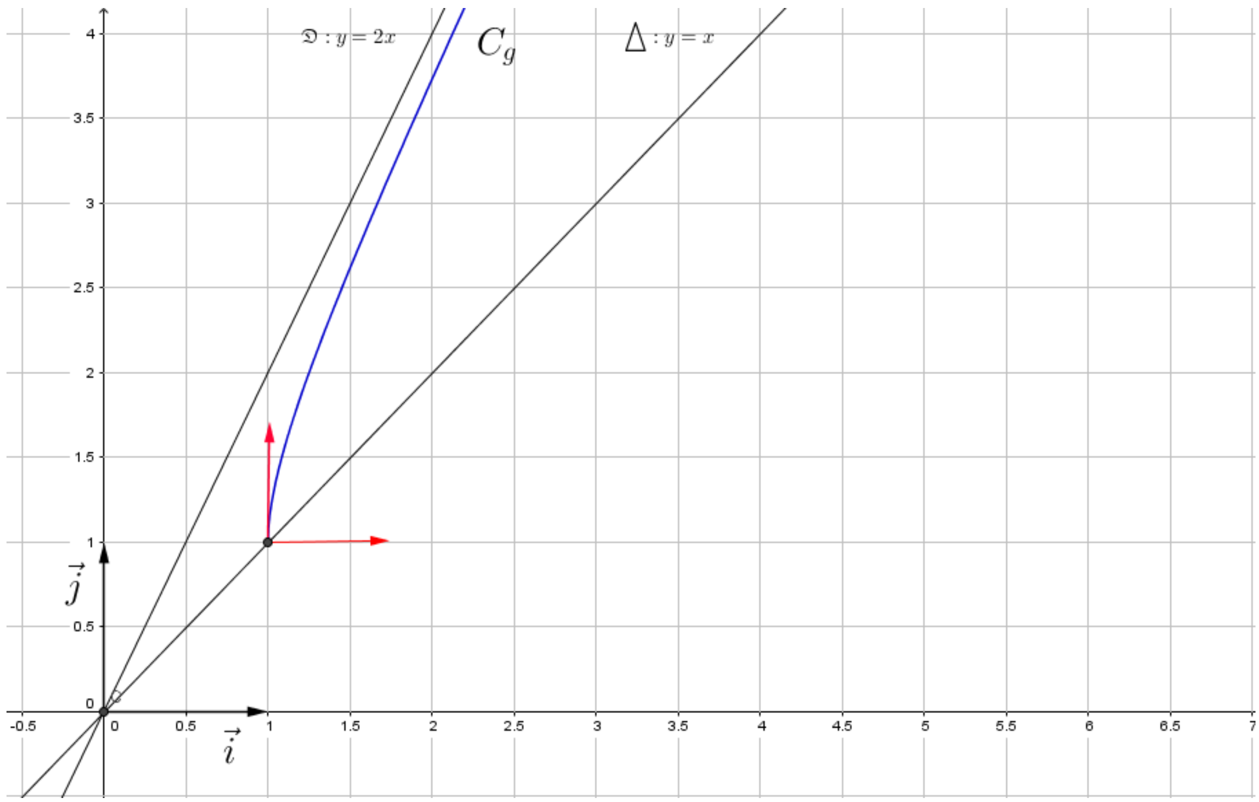
(a) Placer les points A, B et C (laisser les traces de constructions apparentes).

(b) Déterminer $|c|$ puis écrire c sous forme algébrique.

4. (a) Déterminer $\dfrac{AB}{AC}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(b) En déduire la nature du triangle ABC.

Annexe à rende avec la copie



BON TRAVAIL

CORRECTION(proposée par le pro :Guesmi.B)

EXERCICE1

1)c 2)b 3)c 4)c

EXERCICE2

1)a) $u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{8+2u_0^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

b)$pour\ n = 0\ on\ a: 0 < 1 < 2\ vrai\ supposons\ pour\ n \geq 1\ que\ 0 < u_n <$
$2\ et\ montrons\ que\ 0 < u_{n+1} < 2\ \ on\ a : u_{n+1} = \frac{\sqrt{8+2u_n^2}}{2} > 0\ et\ que\ \ \frac{8+2u_n^2}{4} - \frac{16}{4} =$
$\frac{(u_n^2-4)}{2} < 0\ donc\ u_{n+1}^2 < 2^2\ et\ que\ u_n > 0\ donc\ u_{n+1} < 2\ \ alors\ 0 < u_n < 2$

pour n$\in$ IN

2)a)$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{4-u_n^2}{2} < 0\ \ donc\ u_{n+1} < u_n\ \ (u_n > 0) d'ou\ (u)_n\ est\ decroissante$

b)$(u)_n$ est decroissante minoré par 0 donc convergente

3)a) soit la fonction f(x)=$\frac{\sqrt{8+2x^2}}{2}$;

$h(x) = 8 + 2x^2\ derivable\ sur\ IR\ et\ positive\ donc\ f\ est\ derivable\ sur\ IR\ \ et$

$f'(x) = \frac{1}{2}(4x) \times \frac{1}{2\sqrt{8+2x^2}} = \frac{x}{\sqrt{8+2x^2}}\ \ et\ alors$

$f''(x) = \frac{8+x^2}{(8+2x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0\ donc\ f'(x) est\ croissante\ pour\ 0 < x < 2\ \ donc$

$f'(0) < f'(x) < f'(2);$

$f'(0) = 0, f'(2) = \frac{2}{4}\ donc\ \ \frac{-2}{3} < f'(x) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}\ \ alors\ d'apresl'inegalitedu\ TAF\ on\ a\ \left|\frac{2-f(u_n)}{2-u_n}\right| \leq \frac{2}{3}$

(f(2)=2)

$alors\ (2 - u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(2 - u_n) vuque\ 0 < u_n < 2$

b)$on\ a$: $|2-u_n| \leq \frac{2}{3}|2-u_{n-1}|$

……………………………………..

………………………………………

$|2-u_1| \leq \frac{2}{3}|2-u_0|$ $\ et\ que\ u_0 = 1\ \ et\ les\ termes\ sont\ positifs\ apres\ multiplication$

$et\ simplification\ membre\ a\ membre\ et\ que u_n \leq 2\ donc\ |u_n - 2| \leq (\frac{2}{3})^n$

c)$on\ a:\ -1 < \frac{2}{3} < 1\ \ donc\ \lim_{n\to+\infty}|u_n - 2| = 0\ donc\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

EXERCICE3

1)$a)\ D_f = IR -]-1,1[$

b)$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $on\ a: f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}\ \ donc\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2)a)$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{x-1} = \frac{(x^2-1)+(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-1}-(x-1)\right)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}-(x-1)}\ donc$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty\ donc\ f\ n'estpas\ derivable\ a\ droite\ en\ 1$

$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x+1}{x+1} = \frac{-2}{(\sqrt{x^2-1}-(x+1)}$

$donc\ \lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty\ donc\ f\ n'estpas\ derivable\ a\ gauche\ en\ (-1)$

Alors la courbe de la fonction f admet deux demi tangente en (-1) et en 1

4)a)$on\ a: f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\ donc\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x =$
$0\ alors\ la\ droite\ D: y = 2x\ est\ une\ asymptote\ oblique\ à\ la\ courbe\ (C) de\ f\ en + \infty$

On a : f est derivable sur IR-]-1,1[et

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1$, *pour* $x > 1$ *il est evident que* $f'(x) > 0$ *et que* $f'(x) < 0$ *si* $x < -1$

X	-∞		-1		1		+∞
f ‘(x)		-	‖		‖	+	
f(x)	0	↘	-∞ ‖		‖ -∞	↗	+∞

4)a) *la fonction* $f = g$ *est continue et strictent croissante sur* $[1, +\infty[$

donc elle realise une bijection de $[1, +\infty[$ *surIR*

soit $a = g^{-1}(2) \Leftrightarrow g(a) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-1} + a = 2 \Leftrightarrow a^2 - 1 = a^2 - 4a + 4$ *d'ou* $a = \frac{5}{4}$

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{(5/4)^2-1}+1}} = \frac{1}{\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}+1}} = \frac{7}{5}$$

c) g^{-1} *est derivable IR sa courbe representative est la symetrique de*

C_g *par rapport a* $\Delta : y = x$

5)*on a* : $g(x) = \sqrt{x^2-1} + x$; $\forall x \in [1, +\infty[$ *donc* $g\left(\frac{1}{cosx}\right) = \sqrt{\frac{1}{cos^2x} - 1} + \frac{1}{cosx} = \frac{sinx+1}{cosx}$

$\forall x \in I = [0; \frac{\pi}{2}[$

b)*pour* $x \in I$, *h est continue derivable et* $h'(x) = \frac{cos^2x+sin^2x+sinx}{cos^2x} =$

$\frac{1+sinx}{cos^2x} \geq 0$ *donc h est strictement croissante sur I donc elle*

realise une bijection de I sur $[1; +\infty[$ =K

$$c)h^{-1} est\ derivable\ sur\ K\ et\ (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1})(x)} = \frac{1}{h'(y)}$$

$avec\ \ y = h^{-1}(x) alors\ (h^{-1})'(x) = \frac{cos^2 y}{1+siny} = 1 - siny = 1 - sin(h^{-1})(x)$

$ona:\ x = h(y) = \frac{1+siny}{cosy}\ d'ou\ (1+x^2)sin^2y + 2siny + 1 - x^2 = 0$,

$equation\ en\ siny$

$alors\ \sqrt{\Delta} = 2x^2\ et\ donc\ siny = \frac{-1+x^2}{1+y^2}\ alors$

$l'autrevaleur\ incceptable$

$(h^{-1})'(x) = 1 - \frac{-1+x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$

$(x \in [0; \frac{\pi}{2} [\ donc\ siny \geq 0\ )$

EXERCICE4

$1)a)\ \ z_0^4 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3}$

$b)\overline{z_0} = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - i\sqrt{2}\ \times \frac{1}{2}\ est\ aussi\ une\ racine\ 4ème$

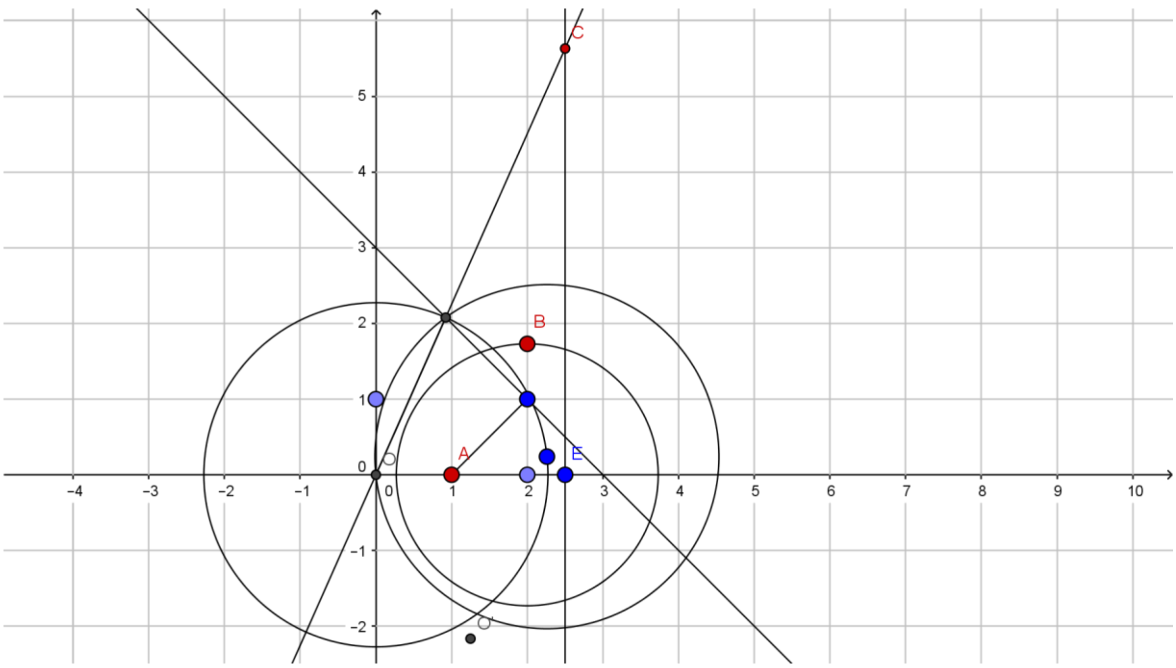
$-z_0\ et - \overline{z_0}\ sont\ aussi\ solutions$

$2)f(1) = 0\ si\ z = 1\ et\ z' sont\ solutions\ alors\ z.z' = \frac{c}{a}\ \ donc\ z' = -2 + 2i\sqrt{3}$

$c)\ on\ pose\ Z = z^4\ on\ revient\ a\ l'equationprecedente\ en\ Z$;

$d'ou\ z^4 = -2 + 2i\sqrt{3}\ et\ les\ solutions\ sont\ z_0; -z_0; \overline{z_0}\ et\ \overline{-z_0}$,

$z^4 = 1\ donc\ les\ solutions\ sont\ 1, -1, i\ et - i$



b)$on\ a: cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{5}{3}}{|c|}\ donc\ |c| = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\ \ donc\ im(c) = 5sin\frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \ d'ou\ c = \frac{5}{2} + i\,\frac{5\sqrt{3}}{2}$

4)a)$\frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|}\ \ et\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})$