EXAMEN DU BACCALAUREAT	Epreuve : MATHEMATIQUES
SESSION DE JUIN 2017	Durée :4H ****** Coefficient : 4
Section : Mathématiques	SESSION PRINCIPALE
Corrigé proposé par : FARID ABIDI	****** Lycée Ibn Rachic - Ezzahra

Exercice 1 :

1. $A\Omega J$ est un triangle rectangle en J et direct donc
$\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{QA}\right)\equiv\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)[2\pi]\equiv\pi-\frac{7\pi}{12}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$.

   $A\Omega D$ est un triangle isocèle en D et direct donc $\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

   Donc $\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega D}\right)\equiv\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega A}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega D}\right)[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2. a) $\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega D}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   b) R(J) = F équivaut à $\Omega F=\Omega J$ et $\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega F}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

   $AI\Omega$ est un triangle rectangle en I, direct et tel que $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{A\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc $AI\Omega$ est un triangle isocèle en I et $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega I}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   Par suite , $\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega I}\right)\equiv\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega A}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega I}\right)[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

   Ainsi , $\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega F}\right)\equiv\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega I}\right)[2\pi]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega F}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ sont colinéaires et de même sens d'où $F\in[\Omega I)$.

   Le cercle de centre Ω coupe la demi droite $[\Omega I)$ en F.

3. a) f(J) = $h\circ R(J)=h(F)=I$.

   b) Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega F}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ sont colinéaires et de même sens donc le rapport de l'homothétie h est strictement positif .

   f est la composée d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'un homothétie de centre Ω et **<u>de rapport strictement positif</u>** donc f est une similitude directe de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   c) $\frac{\Omega I}{\Omega A}=\frac{\Omega I}{\Omega I\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

   f(J) = I donc le rapport de f est $\frac{\Omega I}{\Omega J}=\frac{\Omega I}{\Omega A}\times\frac{\Omega A}{\Omega J}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}$.

4. a) On a :

- ✓ $f \circ S_{(\Omega J)}$ est la composée d'une similitude directe f et d'une similitude indirecte $S_{(\Omega J)}$ donc $f \circ S_{(\Omega J)}$ est une similitude indirecte.
- ✓ $f \circ S_{(\Omega J)}(\Omega) = f(\Omega) = \Omega = g(\Omega)$ et $f \circ S_{(\Omega J)}(J) = f(J) = I = g(J)$

donc $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) le rapport de g est celui de f donc le rapport de g est $1+\sqrt{3}$.

c) Ω, J et g(J) = I ne sont pas alignés donc l'axe de g est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}\right)$.

Or $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et

$$\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega I}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Ainsi l'axe de g est la droite (ΩD).

d) $g = f \circ S_{(\Omega J)} = h \circ R \circ S_{(\Omega J)}$

$= h \circ S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)} \circ S_{(\Omega J)}$.

$= h \circ S_{(\Omega D)}$

e) $h(K) = h\left(S_{(\Omega D)}(K)\right)$

$= h \circ S_{(\Omega D)}(K)$.

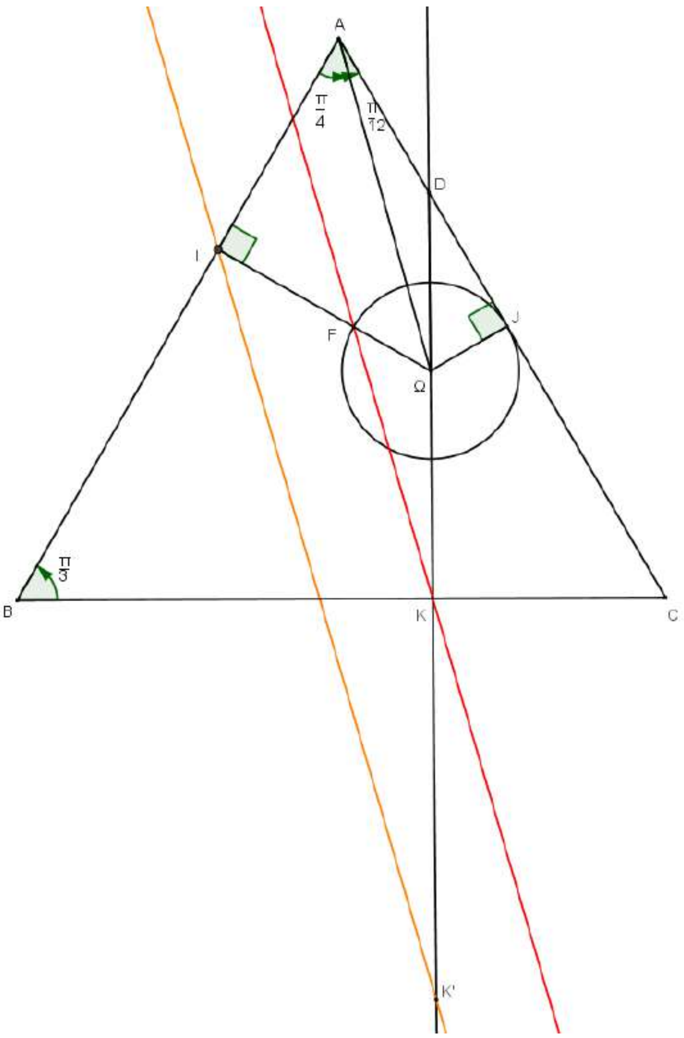
$= g(K)$

$= K'$

H(K) = K' donc $K' \in (\Omega K)$

et h(F) = I donc (KF) // (K'I).

Figure 1 sur annexe 1 à rendre



Exercice 2 :

1. a) On a : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AH}$.

b) L'aire du triangle ECD est égale à : $\frac{1}{2}a=\left\|\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AH}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Le volume du tétraèdre AECD est $v=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}\right).\overrightarrow{EA}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}$.

2. a) (CDG) // (NMP) , (CDG) coupe (ACD) suivant la droite (NM) et (NMP) coupe (ACD) suivant la droite (NM) donc (NM) // (CD).

Comme h(M) = D alors h((CD)) = (NM) donc h(C) appartient à (NM).

Or h(C) appartient à la droite (AC) d'où h(C) = N.

(CDG) coupe (ACG) suivant la droite (CG) et (NMP) coupe (ACG) suivant la droite (NP) donc (CG) //(NP).

Comme h(C) = N alors h((CG)) = (NP) donc h(G) appartient à (NP).

Or h(G) appartient à la droite (AG) d'où h(G) = P.

b) Soit P_M la plan passant par M est parallèle au plan (ECD), P_M coupe [AE] en K donc la droites (KM) et (DE) sont parallèles et par suite h(E) = A. IL en résulte que : le volume v' du tétraèdre AKNM est égale à $v'=\left|\frac{3}{4}\right|^3\times v=\frac{9}{128}$.

3. a) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CDG) donc (CDG) : y + d = 0 , où d est un réel.

Or D(0, 1 ,0) donc d = -1. Par suite , (CDG) : y - 1 = 0.

Le rayon de la sphère (S) est $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $d(I,(CDG))=\frac{\left|\frac{1}{2}-1\right|}{1}=\frac{1}{2}$ donc $d(I,(CDG))<R$ donc (S) coupe (CDG) suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre I' et de rayon r.

$r=\sqrt{R^2-\left(d\left(I,(CDG)\right)\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit Δ la perpendiculaire au plan (CDG) passant par I, I' est le point d'intersection de Δ et (CDG).

On a , $\Delta:\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}+\alpha\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\frac{1}{2}+\alpha=1$ d'où $I'\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

b) (S) coupe (CDG) suivant le cercle $\mathscr{C}$ donc h(S) =S' coupe h((CDG)) = (NMP) suivant un cercle $\mathscr{C}'$ = h($\mathscr{C}$) de centre h(I') = I'' et de rayon $\left|\frac{3}{4}\right|r=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

L'expression analytique de h est $\begin{cases}x'=\frac{3}{4}x\\ y'=\frac{3}{4}y\\ z'=\frac{3}{4}z\end{cases}$ donc $I''\left(\frac{3}{8},\frac{3}{4},\frac{3}{8}\right)$.

Exercice 3 :

1. a) 53 est un nombre premier et (x et 53 sont premiers entre eux) alors $x^{52}\equiv 1\pmod{53}$ donc le reste modulo 53 de x^{52} est 1.

   b) Pour tout entier naturel k, $x^{52k}\equiv 1\pmod{53}$ donc $x^{52k}.x\equiv x\pmod{53}$

   d'où $x^{52k+1}\equiv x\pmod{53}$.

2. Remarquons que 2 et 53 sont premiers entre eux. D'autre part , $\left(2^9\right)^{29}=2^{261}=2^{52\times5+1}$

   Donc $\left(2^9\right)^{29}\equiv 2\pmod{53}$. Par suite , 2^9 est solution de (E_1).

3. a) si x est solution de (E_1) alors $x^{29}\equiv 2\pmod{53}$.

   Supposons que x et 53 ne sont pas premiers entre eux , alors 53 divise x et donc $x\equiv 0\pmod{53}$ donc $x^{29}\equiv 0\pmod{53}$.

   D'où $2\equiv 0\pmod{53}$ ce qui est impossible.

   Par suite , x et 53 sont premiers entre eux.

   b) x et 53 sont premiers entre eux donc $x^{52\times5+1}\equiv x\pmod{53}$ donc $x^{261}\equiv x\pmod{53}$.

c) On a : $\left(2^9\right)^{29} \equiv 2\left(\bmod 53\right)$ et $x^{29} \equiv 2\left(\bmod 53\right)$ donc $x^{29} \equiv \left(2^9\right)^{29}\left(\bmod 53\right)$ donc $x^{29} - \left(2^9\right)^{29} \equiv 0\left(\bmod 53\right)$.

Comme $x^{29} - \left(2^9\right)^{29} = \left(x - 2^9\right)\left[x^{28} + 2x^{27} + 4x^{26} + \ldots + 2^i x^{28-i} + \ldots + 2^{27}x + x^{28}\right]$,

alors $\left(x - 2^9\right)\left[x^{28} + 2x^{27} + 4x^{26} + \ldots + 2^i x^{28-i} + \ldots + 2^{27}x + x^{28}\right] \equiv 0\left(\bmod 53\right)$

donc $x - 2^9 \equiv 0\left(\bmod 53\right)$ d'où $x \equiv 2^9\left(\bmod 53\right)$.

4. a) On a $2^9 = 512 = 9\times 53 + 35$ donc $2^9 \equiv 35\left(\bmod 53\right)$.

b) x est solution de (E_1) équivaut à $x \equiv 2^9\left(\bmod 53\right)$ équivaut à $x \equiv 35\left(\bmod 53\right)$ équivaut à $x = 53n + 35,\ n \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1) est $\left\{53n + 35,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. a) $71\times 3 - 53\times 4 = 213 - 212 = 1$ donc (3, 4) est solution de l'équation (E_2).

b) (E_2) équivaut à $71\left(u-3\right) - 53\left(v-4\right) = 0$ équivaut à $71\left(x-3\right) = 53\left(y-4\right)$.

53 divise $71\left(u-3\right)$ et $53 \wedge 71 = 1$ donc 53 divise $u - 3$

donc il existe un entier q tel que $u - 3 = 53q$ ou encore $u = 53q + 3$.

$71\left(u-3\right) = 53\left(v-4\right)$ donc $71\times 53q = 53\left(v-4\right)$ donc $v - 4 = 71q$ donc $v = 71q + 4$.

Ainsi, si $71u - 53v = 1$ alors $\left(u, v\right) = \left(53q + 3, 71q + 4\right),\ q \in \mathbb{Z}$.

Inversement :

si $\left(u, v\right) = \left(53q + 3, 71q + 4\right),\ q \in \mathbb{Z}$,

alors $71u - 53v = 71\left(53q + 3\right) - 53\left(71q + 4\right) = 71.53q + 213 - 71.53q - 212 = 1$.

Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{\left(53q + 3, 71q + 4\right),\ q \in \mathbb{Z}\}$.

6. $\begin{cases} x \equiv 34\left(\bmod 71\right) \\ x^{29} \equiv 2\left(\bmod 53\right) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x \equiv 34\left(\bmod 71\right) \\ x \equiv 35\left(\bmod 53\right) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 71m + 34,\ m \in \mathbb{Z} \\ x = 53n + 3,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 71m + 34,\ m \in \mathbb{Z} \\ x = 53n + 35,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 71m - 53n = 1 \\ x = 53n + 35 \end{cases}$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$

D'où $n = 71q + 4,\ q \in \mathbb{Z}$

Donc $x = 53\left(71q + 4\right) + 35 = 3763q + 247,\ q \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 :

Pour tout $x \geq 0$, $f\left(x\right) = \sqrt{e^x - 1}$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{e^x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right).\dfrac{1}{x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right).\dfrac{1}{x}=+\infty$.

Par suite , $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et (C_f) admet une demi tangente verticale à droite en 0 dirigée vers le haut.

b) Pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

c)

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

d) Pour tout $x\geq0$,

$$e^x-1\leq\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow e^x-1-\sqrt{e^x-1}\leq0\Leftrightarrow\sqrt{e^x-1}^{\,2}-\sqrt{e^x-1}\leq0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{e^x-1}\left(\sqrt{e^x-1}-1\right)\leq0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \sqrt{e^x-1}\leq1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 0\leq e^x-1\leq1\Leftrightarrow1\leq e^x\leq2\Leftrightarrow0\leq x\leq\ln2$$

Ainsi , pour tout $x\geq0$, $e^x-1\leq\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow0\leq x\leq\ln2$

3. Pour tout $x>0$, $f''(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}-e^x.\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{e^x-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{2e^x\left(e^x-1\right)-e^{2x}}{2\sqrt{e^x-1}}}{e^x-1}=\dfrac{2e^x\left(e^x-1\right)-e^{2x}}{4\left(e^x-1\right)\sqrt{e^x-1}}$

$$=\frac{e^{2x}-2e^x}{4\left(e^x-1\right)\sqrt{e^x-1}}=\frac{e^x}{4\left(e^x-1\right)\sqrt{e^x-1}}\left(e^x-2\right)$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow x=\ln2$.

Le signe de $f''(x)$ est celui de e^x-2

x	0		$\ln2$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	-	0	+	

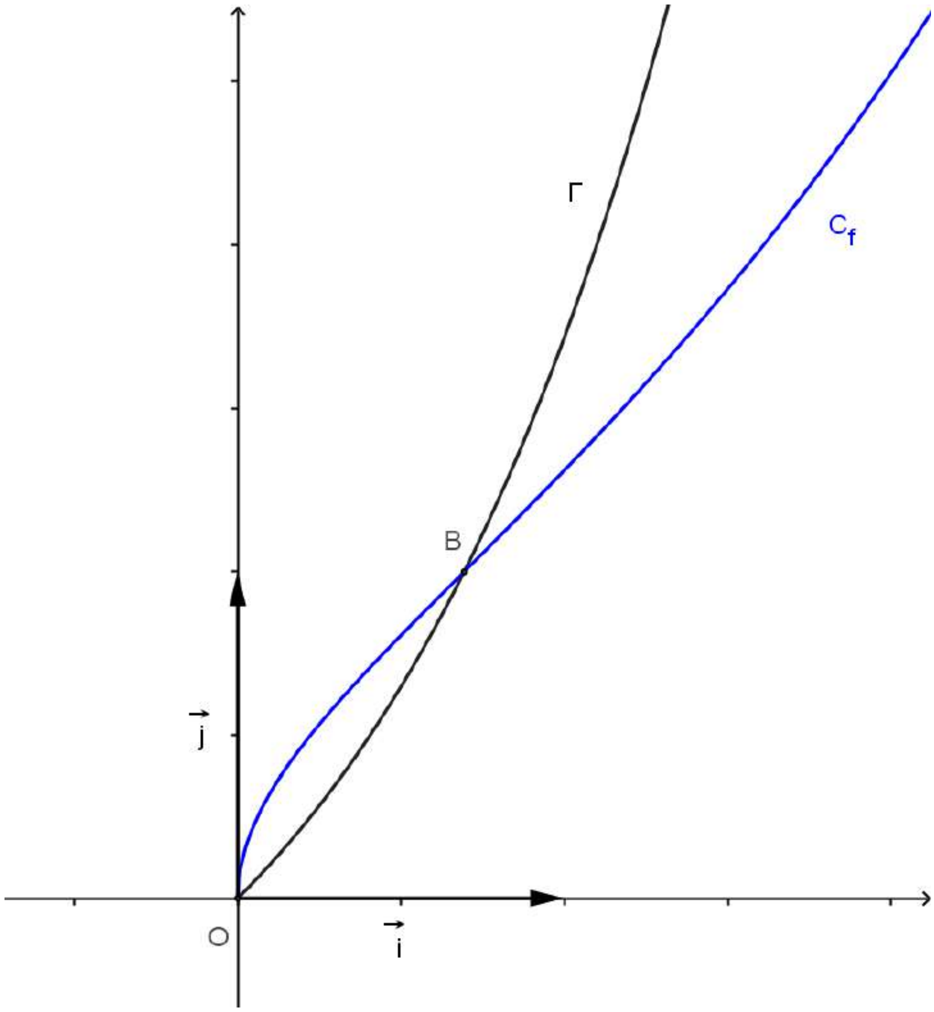
$f(\ln2)=\sqrt{e^{\ln2}-1}=\sqrt{2-1}=1$

Donc B(ln2, 1) est un point d'inflexion de (C_f).

4. a) Pour tout x de $[0,\ln 2]$, $e^x-1\le\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow e^x-1\le f(x)$ donc Γ est au-dessous de (C_f) sur $[0,\ln 2]$.

Pour tout x de $[\ln 2,+\infty[$, $e^x-1\ge\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow e^x-1\ge f(x)$ donc Γ est au-dessus de (C_f) sur $[\ln 2,+\infty[$.

b) Figure 2 sur annexe 2 à rendre



5. Soit $g(x)=\tan(x)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) g est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}g(x)\right[=[0,+\infty[$.

b) $g(0)=0$ donc $g^{-1}(0)=0$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ donc $g^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

c) Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=1+\tan^2 x$

g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur

$[0,+\infty[$ et pour tout y de $[0,+\infty[$, $\left(g^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{g'(x)}=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+y^2}$.

Ainsi, pour tout x de $[0,+\infty[$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

d) On a : $\begin{cases} x\geq 0 \\ g^{-1}(x)=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ g(y)=x\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y-0}{g(y)-g(0)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{g(y)-g(0)}{y-0}}=\frac{1}{g'(0)}=1.$$

6. a) F est la primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 0 donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout x de $[0,+\infty[$, $F'(x)=f(x)$.

D'autre part , pour tout x de $[0,+\infty[$,

$$G'(x)=2\left[f'(x)-f'(x).\left(g^{-1}\right)'(f(x))\right]=2\left[f'(x)-f'(x).\frac{1}{1+(f(x))^2}\right]$$

$$=2f'(x)\left[1-\frac{1}{1+(f(x))^2}\right]=2f'(x)\left[\frac{(f(x))^2}{1+(f(x))^2}\right]=\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}.\frac{e^x-1}{e^x}$$

$$=\sqrt{e^x-1}=f(x).$$

Ainsi , pour tout x de $[0,+\infty[$, $F'(x)=G'(x)$.

b) On a : F(0) = 0 et $G(0)=2\left[f(0)-\left(g^{-1}\circ f\right)(0)\right]=2\left[-g^{-1}(0)\right]=0$ donc F(0) = G(0).

Et comme pour tout x de $[0,+\infty[$, $F'(x)=G'(x)$, alors pour tout x de $[0,+\infty[$, $F(x)=G(x)$.

c) A = $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\left(f(x)-\left(e^x-1\right)\right)dx=\int_0^{\ln 2}f(x)dx-\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)dx=F(\ln 2)-\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$

$$=G(\ln 2)-(1-\ln 2)=2\left(f(\ln 2)-\left(g^{-1}\circ f\right)(\ln 2)\right)-1+\ln 2$$

$$=2\left(1-\left(g^{-1}\right)(1)\right)-1+\ln 2=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-1+\ln 2$$

$$=1+\ln 2-\frac{\pi}{2}$$

7. Pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout x de $[\ln(n),+\infty[$, $f_n(x)=\sqrt{e^x-n}$.

On pose , pour tout x de $[\ln(n),+\infty[$, $G_n(x)=2\left(f_n(x)-\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

a) $G_n(\ln(n)) = 2\left(f_n(\ln(n)) - \sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{f_n(\ln(n))}{\sqrt{n}}\right)\right) = 2\left(0 - \sqrt{n}\, g^{-1}(0)\right) = 0$

Pour tout x de $[\ln(n), +\infty[$,

$$G_n'(x) = 2\left(f_n'(x) - \sqrt{n}\,\frac{f_n'(x)}{\sqrt{n}}\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right) = 2f_n'(x)\left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)$$

$$= 2f_n'(x)\left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)^2}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-n}}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{e^x-n}{n}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-n}}\left(\frac{\frac{e^x-n}{n}}{1+\frac{e^x-n}{n}}\right)$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{e^x-n}}\left(\frac{\frac{e^x-n}{n}}{\frac{e^x}{n}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-n}}\left(\frac{e^x-n}{e^x}\right) = \sqrt{e^x-n} = f_n(x)$$

Donc , pour tout x de $[\ln(n), +\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^{x} f_n(t)\,dt$.

b) $n \geq 2$ donc $n \geq 1$ donc $-n \leq -1$ donc , pour tout x de $[\ln(n), +\infty[$, $e^x - n \leq e^x - 1$

d'où $\sqrt{e^x - n} \leq \sqrt{e^x - 1}$.

Par suite, pour tout x de $[\ln(n), +\infty[$, $f_n(x) \leq \sqrt{e^x - 1}$.

Or pour tout $x \geq 2$, $\sqrt{e^x-1} \leq e^x - 1$, il en résulte que pour tout $x \geq \ln(n)$,

$f_n(x) \leq \sqrt{e^x-1} \leq e^x - 1$.

c) Γ est au-dessus de (C_n) sur $[\ln(n), +\infty[$ donc

$$A_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left(\left(e^x-1\right) - f_n(x)\right)dx = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left(e^x-1\right)dx - \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f_n(x)\,dx$$

$$= \left[e^x - x\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} - G_n(\ln(n+1))$$

$$=\left(1-\ln(n+1)+\ln(n)\right)-2\left(f_n\left(\ln(n+1)\right)-\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{f_n\left(\ln(n+1)\right)}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$=1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-2\left(1-\sqrt{n}g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$=1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-2+2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln 1 = 0$.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 2-1 = 1$