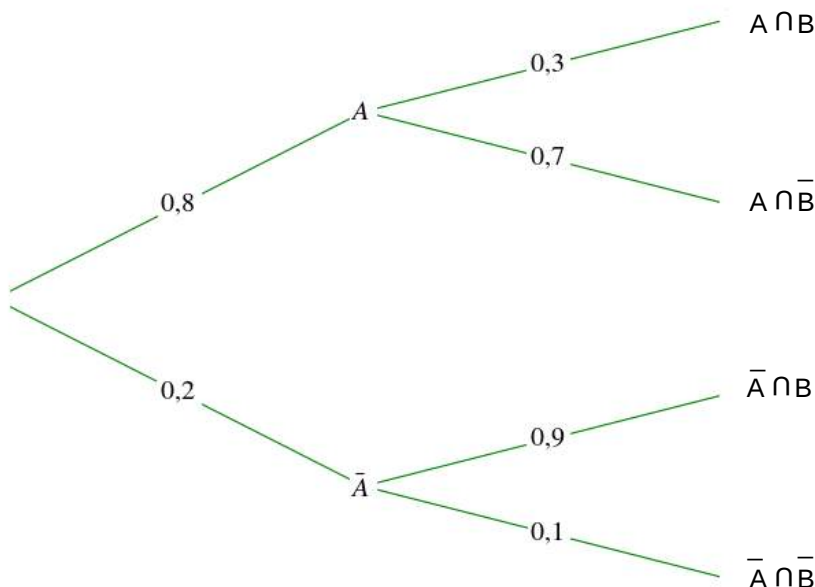


EXAMEN DU BACCALAUREAT	Epreuve : MATHÉMATIQUES
SESSION DE JUIN 2017	Durée : 4H ***** Coefficient : 4
Section : Mathématiques	SESSION DE CONTRÔLE
Corrigé proposé par : FARID ABIDI ***** Lycée Ibn Rachic - Ezzahra	

Exercice 1 :



1. a
2. b
3. c

Exercice 2 :

1. AIC est un triangle direct et rectangle en I et E milieu de [AC] donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle AIC .

Il en résulte que : $EA = EI$ et $\left(\widehat{\vec{EA}, \vec{EI}} \right) \equiv 2 \left(\widehat{\vec{CA}, \vec{CI}} \right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Ainsi le triangle AIC est équilatéral direct .

2. a) ABI est un triangle direct , isocèle et rectangle en I donc $AB = \sqrt{2}AI$ et $\left(\widehat{\vec{AI}, \vec{AB}} \right) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$
donc $S(I) = B$.

$$f(E) = S \circ S_{\Delta}(E) = S(I) = B.$$

b) On a $f(A) = S \circ S_{\Delta}(A) = S(A) = A$ et $f = S \circ S_{\Delta}$ est la composée d'une similitude directe et de rapport $\sqrt{2}$ et d'une similitude indirecte de rapport 1 donc f est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{2}$ et de centre A.

c) $f \circ f$ est l'homothétie de centre A et de rapport $(\sqrt{2})^2 = 2$.

On a : $f \circ f(E) = f(f(E)) = f(B)$. Posons $f \circ f(E) = E'$, $\vec{AE'} = 2\vec{AE} = \vec{AC}$ donc $E' = C$.

Par suite, $f(B) = C$.

d) (BJ) est la droite perpendiculaire à la droite (AE) passant par B donc $f((BJ))$ est la droite perpendiculaire à $f((AE)) = (AB)$ passant par $f(B) = C$. Or la droite (CK) est perpendiculaire à (BK) donc $f((BJ)) = (KC)$.

$J \in (BJ)$ donc $f(J) \in (CK)$ et $J \in (AE)$ donc $f(J) \in (AB)$. Comme $(CK) \cap (AB) = \{K\}$ alors $f(J) = K$

3. g est la similitude indirecte telle que $g(C) = A$ et $g(K) = I$

a) Posons $g(B) = B'$, BCK est un triangle direct, isocèle et rectangle en K donc son image par g est le triangle $B'AI$ indirect, isocèle et rectangle en I. Or BAI triangle indirect, isocèle et rectangle en I, donc $B' = B$ d'où $g(B) = B$. Ainsi, B est le centre de g .

b) Soit $D = g(A)$, $A \in (BK)$ donc $D \in (BI)$.

c) On a : $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})} \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$, $g(C) = A$, $g(B) = B$ et $g(A) = D$ donc $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Désignons T un point du plan distinct de A telle que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, la demi droite [AT) coupe la droite (BI) en D. (Voir figure ci-dessous).

4. a) φ est la composée de deux similitudes indirectes donc φ est une similitude directe.

$$\varphi(A) = g \circ f(A) = g(f(A)) = g(A) = D \quad \text{et} \quad \varphi(B) = g \circ f(B) = g(f(B)) = g(C) = A.$$

b) $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA})} \equiv \pi + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \pi + \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$ donc l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5. Soit Ω le centre de φ .

$$a) \varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = \varphi \circ \varphi \circ g \circ f(E) = \varphi \circ \varphi \circ g(B) = \varphi \circ \varphi(B) = \varphi(A) = D.$$

Comme $3 \times \frac{7\pi}{6} \equiv \frac{7\pi}{2}[2\pi] \equiv 2\pi - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ est une similitude directe de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que $\widehat{(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D})} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$, comme $D = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)$ alors $\widehat{(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{JE})} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $(FD) \perp (JE)$

$$c) F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J) = \varphi \circ \varphi \circ g \circ f(J) = \varphi \circ \varphi \circ g(K) = \varphi \circ \varphi(I).$$

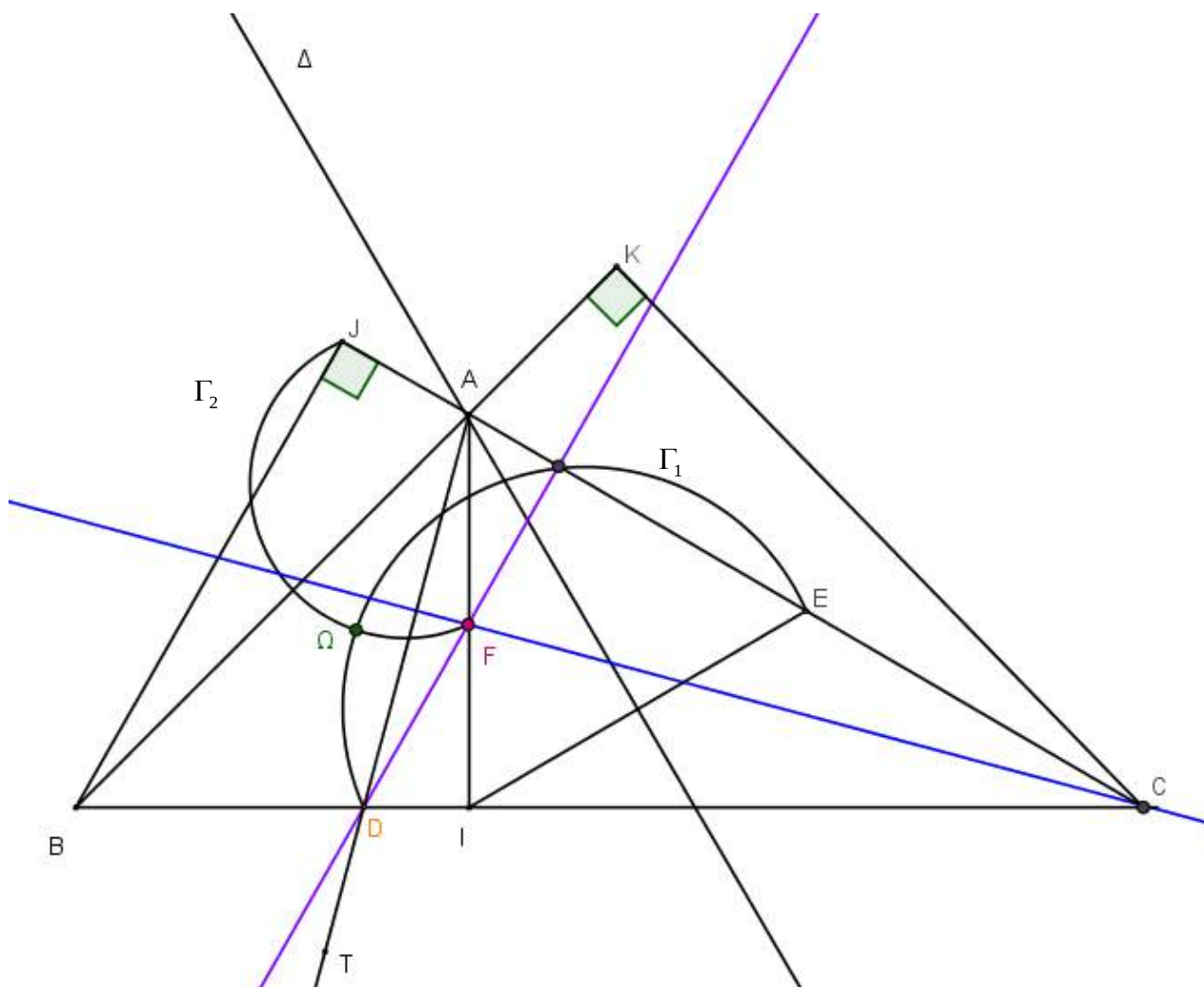
$$D'autre part, \varphi \circ \varphi(B) = \varphi(A) = D \quad \text{et} \quad \varphi \circ \varphi(E) = \varphi \circ g \circ f(E) = \varphi \circ g(B) = \varphi(B) = A.$$

Soit k le rapport de la similitude directe $\varphi \circ \varphi$, comme $IB = IE$ alors $FD = k IB = k IE = FA$.

Ainsi, $FD = FA$.

F est le point d'intersection de la médiatrice du segment [AD] et de la perpendiculaire à (JE) issue de D.

Soit $\Gamma_1 = \left\{ M, M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MD}} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$ et $\Gamma_2 = \left\{ M, M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MF}} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$,
 $\{\Omega\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.



Exercice 3 :

1. a) Soit l'équation (E) : $z^2 - \left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + 1 = 0$.

Le discriminant de (E) est $\Delta = \left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 4 = \frac{9}{4} + 3i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - 4 = -\frac{5}{2} + 3i \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$ donc

l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 .

- b) $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $z_1 + z_2$ n'est pas réel, alors z_1 et z_2 ne sont pas conjuguées.

2. a) C est milieu de [AB] donc $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $(z_2 - z_1)^2 = z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2 = z_2^2 + 2z_1z_2 + z_1^2 - 4z_1z_2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$
 $= (2z_C)^2 - 4 = 4z_C^2 - 4 = 4(z_C^2 - 1).$

c) $(z_2 - z_1)^2 = 4(z_C^2 - 1) \Leftrightarrow (z_2 - z_1)^2 = 4(z_C - 1)(z_C + 1) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_C + 1} = 4 \frac{z_C - 1}{z_2 - z_1}$

donc $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_C + 1}\right) \equiv \arg\left(4 \frac{z_C - 1}{z_2 - z_1}\right) [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_C + 1}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - 1}{z_2 - z_1}\right) [2\pi]$

donc $\widehat{(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC})} [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{JC})} \equiv 0 [2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI})} + \pi + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ})} \equiv 0 [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ})} \equiv 0 [2\pi]$

$\widehat{(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AB})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ})} [2\pi] \text{ donc } \widehat{(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ})} [2\pi] \equiv 2 \widehat{(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AB})} [2\pi]$

donc (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3. a) $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle IAJ et K son centre donc K appartient à la médiatrice de [IJ]. Comme $\left(\vec{O}, \vec{v}\right)$ est la médiatrice de [IJ] alors K appartient à $\left(\vec{O}, \vec{v}\right)$.

b) On pose $z_K = iy, y \in \mathbb{R}$

Soit M un point d'affixe z,

$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow KM^2 = KI^2 \Leftrightarrow |z - z_K|^2 = |1 - z_K|^2 \Leftrightarrow |z - iy|^2 = |1 - iy|^2$

D'où $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow |z - iy|^2 = |1 - iy|^2 \Leftrightarrow (z - iy)(\bar{z} + iy) = (1 - iy)(1 + iy)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + iyz - iy\bar{z} + y^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1$

c) $A \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + iy(z_1 - \bar{z}_1) = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 1 - iy(z_1 - \bar{z}_1)$

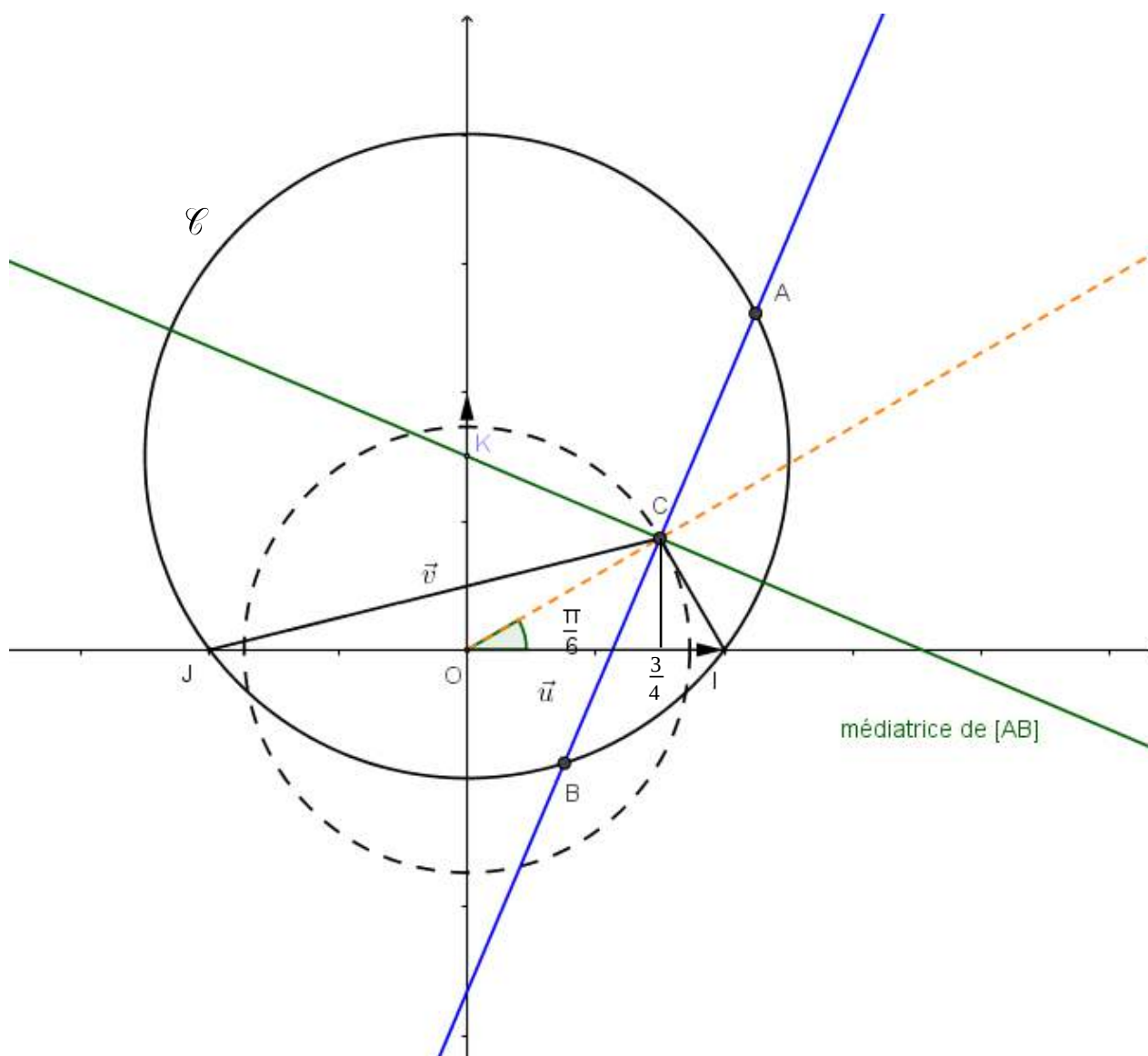
$z_2\bar{z}_2 + iy(z_2 - \bar{z}_2) = \frac{1}{z_1} \frac{1}{\bar{z}_1} + iy\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\bar{z}_1}\right) = \frac{1}{z_1\bar{z}_1} + iy\left(\frac{\bar{z}_1 - z_1}{z_1\bar{z}_1}\right) = \frac{1 + iy(\bar{z}_1 - z_1)}{z_1\bar{z}_1}$

$= \frac{1 - iy(z_1 - \bar{z}_1)}{z_1\bar{z}_1} = 1$

Donc $B \in (\mathcal{C})$.

4. a) On a : $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) K le centre du cercle ($\mathcal{C}$) est le point d'intersection de la médiatrice du segment [IJ] et la droite $(O, \vec{v})$



Exercice 4 :

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

A-1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

La droite $\left(O, \vec{j}\right)$ est asymptote à (C_f) .

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{x+1}}$$

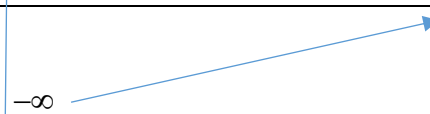
$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{x+1}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$$2. a) \text{ Pour tout } x > 0, \quad f'(x) = \frac{\frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2}}{\frac{x^2}{x+1}} = \frac{\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}}{\frac{x^2}{x+1}} = \left(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	0



c) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $J = f(]0, +\infty[) =]-\infty, 0[$.

$$3. a) x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Le discriminant est $\sqrt{5}$ donc les solutions de l'équation sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = x+1$ est $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Soit $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c) Pour tout $x > 0$, $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x+1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \alpha$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α .

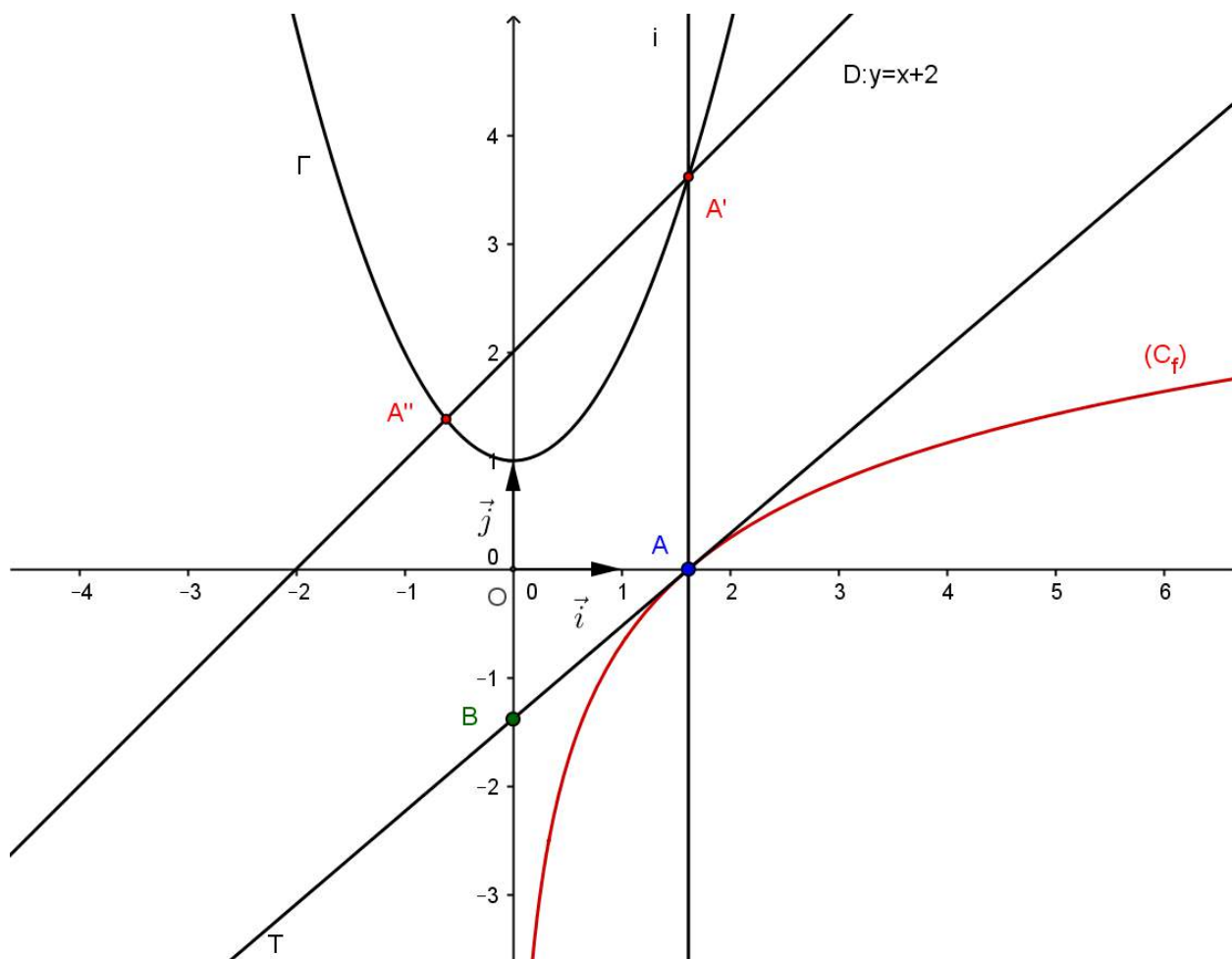
d) On a : $f(\alpha) = 0$ et $\alpha^2 = \alpha + 1$ donc $f'(\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1)+1}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}$.

Ainsi, une équation de la tangente T à (C_f) au point A est

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^3}\right)(x - \alpha).$$

e) Soit $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$, $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^3}\right)(0 - \alpha) = -1 - \frac{2}{\alpha^2}$ donc T passe par B.

4. a) et b)



B- Soit n un entier non nul, On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$.

1.a) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 1$,

$$1 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq t^n \leq x^n \Rightarrow f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$$

$$\text{Donc } \int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) dt \leq \int_1^x f(t^n) dt \leq \int_1^x f(x^n) dt$$

$$\text{donc } \ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq \int_1^x f(t^n) dt \leq f(x^n)(x-1) \text{ d'où } \ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$$

$$\text{b) On pose } u(x) = f(t^n), \quad u'(t) = nt^{n-1}f'(t^n) = n \frac{t^n + 2}{t(t^n + 1)} = \frac{1}{t} \left(n + \frac{n}{t^n + 1} \right)$$

$$v'(t) = 1, \quad v(t) = t$$

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \int_1^x f(t^n) dt = \left[t f(t^n) \right]_1^x - \int_1^x \left(n + \frac{n}{t^n + 1} \right) dt = x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \int_1^x n dt - \int_1^x \frac{n}{t^n + 1} dt \\ &= x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt \end{aligned}$$

$$2. \text{ On pose } J_n = n \int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n} dt.$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \alpha} = e^0 = 1.$$

$$\text{b) } \ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha} - 1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq f(\alpha)(\sqrt[n]{\alpha} - 1) \text{ donc } \ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha} - 1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq 0$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha} - 1) = 0 \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln \alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln \alpha} - 1}{\frac{1}{n} \ln \alpha}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{d) On a : } G_n(\sqrt[n]{\alpha}) &= \sqrt[n]{\alpha} f(\alpha) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) - \int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{n}{1+t^n} dt = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) - J_n \\ \text{donc } J_n &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) - G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} - G_n(\sqrt[n]{\alpha}). \end{aligned}$$

$$\text{Par suite, } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = \ln 2 - \ln \alpha = \ln(\sqrt{5} - 1)$$