Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session de contrôle 2016

Exercice 1

1) a) On sait que OCID est un losange donc $DI = DO$ et OIDA est un losange donc $IO = ID$, il en résulte que $DI = DO = OI$ par suite le triangle DOI est équilatéral donc $\begin{cases} ID = IO \\ \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IO}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que $R(D) = O$.

Le triangle DOI est équilatéral et J est un centre de symétrie du losange OCID donc OCI est un triangle équilatéral donc $\begin{cases} IO = IC \\ \left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que $R(O) = C$.

b) Le triangle DAO est équilatéral direct (Le symétrique de DOI par (DO)) de donc son image par R est un triangle équilatéral direct (Le symétrique de COI par (CO)) et puisque $R(D) = O$, $R(O) = C$ et le triangle OBC est équilatéral direct donc l'image du triangle DAO par R est le triangle OBC, on en déduit que $R(A) = B$.

2) a) $g(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(A) = S_{(OL)}(B) = C$.

$g(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(D) = S_{(OL)}(C) = B$.

b) $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)} = S_{(OL)} \circ t_{2\overrightarrow{DJ}} = S_{(OL)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$ et puisque $\overrightarrow{DC}$ est directeur de (OL), il en résulte que g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et d'axe (OL).

3) a) φ est la composée de deux similitudes directes (R et h) de rapports respectifs 1 et $\dfrac{1}{2}$ et d'une similitude indirecte $\left(g^{-1}\right)$ de rapport 1 donc φ est une similitude indirecte de rapport $1 \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$ donc elle admet un centre et puisque $\varphi(C) = R \circ h \circ g^{-1}(C) = R \circ h(A) = R(O) = C$, on en déduit que C est le centre de φ.

b) $\varphi(B) = R \circ h \circ g^{-1}(B) = R \circ h(D) = R(J) = K$.

c) $h \circ S_{(AC)}$ est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) donc c'est une similitude indirecte

de plus $\begin{cases} h \circ S_{(AC)}(C) = C = \varphi(C) \\ h \circ S_{(AC)}(B) = h(I) = K = \varphi(B) \\ C \neq B \end{cases}$, on en déduit que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Soit D' le milieu de [OB]. ABCD est un rectangle donc son image par φ est un rectangle

$\begin{cases} \varphi(A) = h \circ S_{(AC)}(A) = O \\ \varphi(B) = K \\ \varphi(C) = C \end{cases}$ et OKCD' est un rectangle, il en résulte que l'image du rectangle ABCD

par φ est le rectangle OKCD'.

Exercice 2

1) a) $(3\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9(\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9$ donc M est un point de (E).

b) $\begin{cases} x_M = x_P \\ y_M = y_N \end{cases}$.

c) $T : 3(\cos\theta)x + 9(\sin\theta)y = 9 \Leftrightarrow x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3.$

2) a) $H(x,y) \in T \cap (O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{3}{\cos\theta} \end{cases}$, il en résulte que $H\left(\dfrac{3}{\cos\theta}, 0\right)$.

$K(x,y) \in T \cap (O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{\sin\theta} \end{cases}$, il en résulte que $K\left(0, \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$.

b) $HK^2 = \left(\dfrac{3}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$$f'(\theta) = \frac{18\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin^4\theta} = \frac{18\sin^4\theta - 2\cos^4\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta} = 2\left(4\sin^2\theta - 1\right)\frac{3\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}.$$

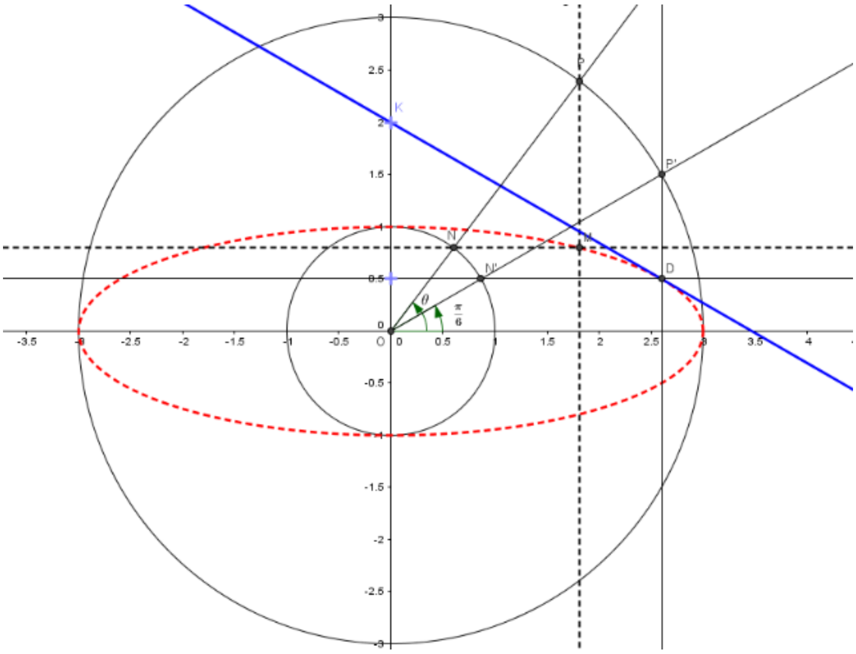
b) Le signe de $f'(\theta)$ est celui de $4\sin^2\theta - 1 = (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1)$.

$$\begin{cases} f'(\theta) = 0 \\ \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\theta - 1 = 0 \\ \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$+\infty \searrow$	16	$\nearrow +\infty$	

D'après le tableau de variation HK est minimale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) Voir figure.



Exercice 3

1) Soit r le reste de a (mod 5).

On a a est premier avec 5, donc $r \in \{1,2,3,4\}$ or $r \wedge 5 = 1$ et 5 est premier donc $r^4 \equiv 1 \pmod 5$

Puisque $a^4 \equiv r^4 \pmod 5$, il en résulte que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

2) a) $q \equiv p \pmod 4$ et $p \le q \Leftrightarrow q = 4n + p, n \in \mathbb{N}$.

$a^q \equiv a^{4n+p} \pmod 5 \equiv a^{4n}.a^p \pmod 5 \equiv a^p \pmod 5$.

b) Soit r le reste de a modulo 2, donc $r \in \{0,1\}$

Si $r = 0$ alors $a^p \equiv a^q \equiv 0 \pmod 2$ et si $r = 1$ alors $a^p \equiv a^q \equiv 1 \pmod 2$

On en déduit que $a^p \equiv a^q \pmod 2$

c) On a $\begin{cases} a^p \equiv a^q \pmod 2 \\ a^p \equiv a^q \pmod 5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a^p - a^q \equiv 0 \pmod 2 \\ a^p - a^q \equiv 0 \pmod 5 \\ 2 \wedge 5 = 1 \end{cases}$, on en déduit que $a^p - a^q \equiv 0 \pmod{2 \times 5}$ ou encore $a^p \equiv a^q \pmod{10}$.

3) a) $25 \times 1 - 21 \times 1 = 4$.

b) $25x - 21y = 25 \times 1 - 21 \times 1$ donc $25(x-1) = 21(y-1)$ (*)

$\left.\begin{matrix} 25 \text{ divise } 21(y-1) \\ 25 \wedge 21 = 1 \end{matrix}\right.$ donc 25 divise $(y-1)$ donc $y = 25k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant y dans (*), on obtient $x = 21k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{Z}\}$

c) $A = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{N}\}$

d) $\alpha = 21k + 1$ et $\beta = 25k + 1, k \in \mathbb{N}$, donc $\beta - \alpha = 4k$ on déduit d'après 2) que $n^\alpha \equiv n^\beta \pmod{10}$.

Exercice 4

1) a) La fonction $v : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier en $e^{\sqrt{2}}$, il en résulte que

$$\lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{v(x) - v\left(e^{\sqrt{2}}\right)}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = v'\left(e^{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} = e^{-\sqrt{2}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{f(x)}{x-e^{\sqrt{2}}} = \lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{-\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}.\left(\dfrac{\ln x-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right)$, or $\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{-\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \left(\dfrac{\ln x-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right) = e^{-\sqrt{2}}$, il en résulte que

$\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{f(x)}{x-e^{\sqrt{2}}} = \lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{-\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}.\left(\dfrac{\ln x-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right) = -\infty$. La courbe (C_f) admet au point d'abscisse $e^{\sqrt{2}}$ une demi-tangente verticale.

c) $\lim\limits_{x\to e^{-\sqrt{2}}} \left(\dfrac{\ln x+\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right) = \lim\limits_{x\to e^{\sqrt{2}}} \left(\dfrac{v(x)-v\left(e^{-\sqrt{2}}\right)}{x-e^{\sqrt{2}}}\right) = v'\left(e^{-\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{e^{-\sqrt{2}}} = e^{\sqrt{2}}$.

$\lim\limits_{x\to\left(e^{-\sqrt{2}}\right)^+} \dfrac{f(x)}{x-e^{-\sqrt{2}}} = \lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} \dfrac{-\left(\ln x-\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}.\left(\dfrac{\ln x+\sqrt{2}}{x-e^{-\sqrt{2}}}\right) = +\infty$. On en déduit que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) La fonction f est dérivable respectivement en α et β de plus f'' s'annule respectivement en α et β en changeant de signe donc les points C et D sont deux points d'inflexions de (C_f).

3) a) Voir figure.
b) Voir figure.

4) a) La fonction g est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $g'(x)=\cos x>0$ donc g est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ par suite elle réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $g\left(\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

b) $\begin{cases} \text{g est strictement coissante sur} \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \text{g est dérivable sur} \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \\ g'(x)\neq 0 \text{ sur} \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$ donc h est dérivable sur $g\left(\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$$h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}=\frac{1}{\cos y}\ \text{avec}\begin{cases}h(x)=y\\ x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(y)=x\\ x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin y=x\\ x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 y=x^2\\ x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\\ \sin y \text{ et } x \text{ de même signe}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=\sqrt{1-x^2}\\ x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right].\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}$$

On en déduit que $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) La fonction u est dérivable sur $\left[e^{-1},e\right]$ et $u'(x)=h'\left(\frac{\ln x}{\sqrt2}\right)\frac{1}{\sqrt2 x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\ln^2 x}{2}}}\frac{1}{\sqrt2 x}=\frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) $\int_{e^{-1}}^{e}\frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx=\left[u(x)\right]_{e^{-1}}^{e}=u(e)-u\left(e^{-1}\right)=h\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)-h\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

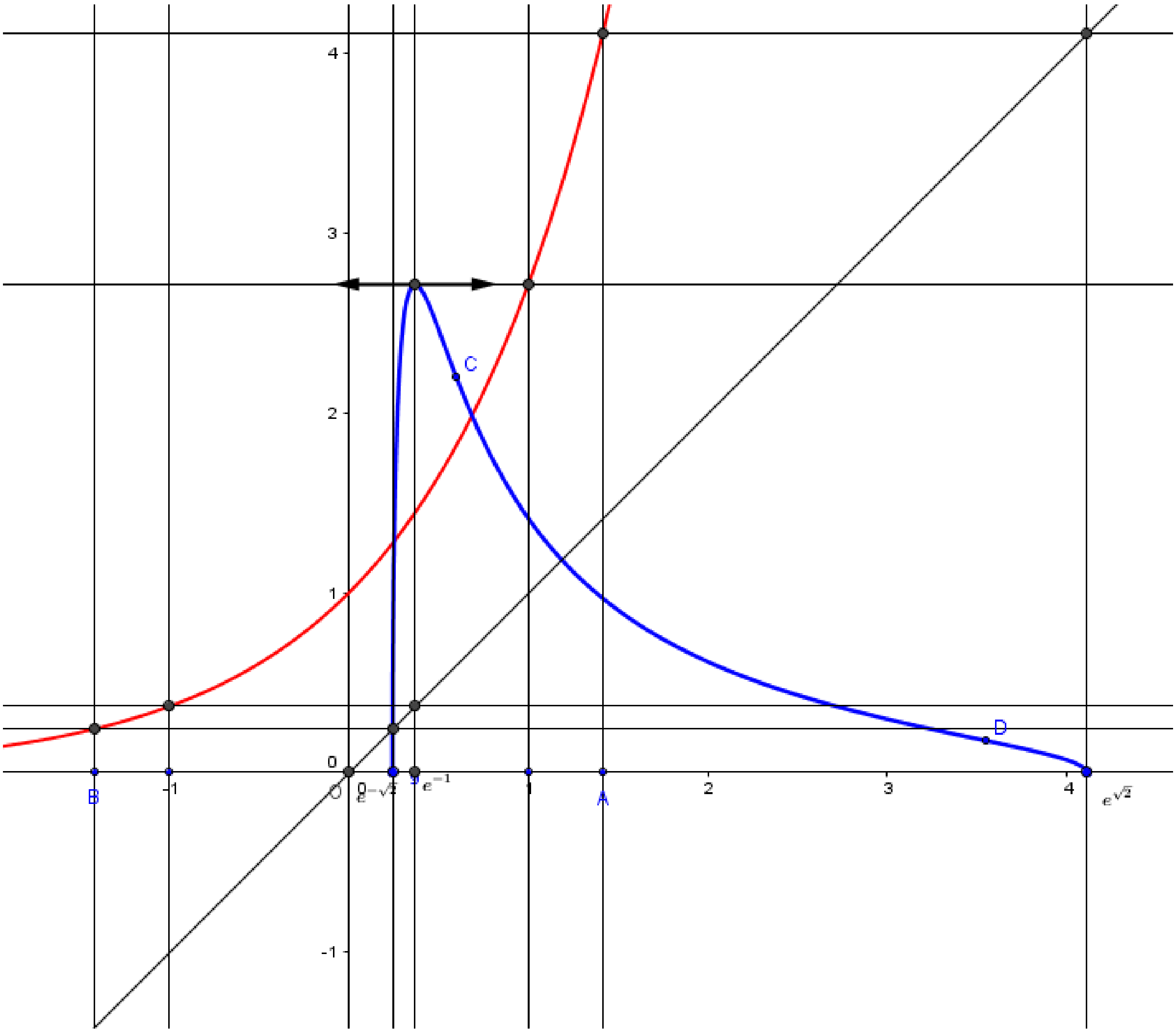
5) a) $A=\int_{e^{-1}}^{e}f(x)dx=\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}dx$

On pose $\begin{cases}u(x)=\sqrt{2-\ln^2 x}\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}\to\begin{cases}u(x)=\frac{-\ln x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\\ v(x)=\ln x\end{cases}$

$$A=\left[\sqrt{2-\ln^2 x}\,\ln x\right]_{e^{-1}}^{e}+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx=2+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx.$$

b) Pour tout $x\in\left[e^{-1},e\right]$, $f(x)=\frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}=\frac{2-\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=\frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}-\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$, il en résulte que $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=\frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}-f(x)$.

c) $A=2+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx=2+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx-\int_{e^{-1}}^{e}f(x)dx=2+\pi-A$, il en résulte que $2A=\pi+2$ ou encore $A=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ua.



4
3
2
1
0
-1
C
D
B
-1
O
0
$e^{-\sqrt{2}}$
e^{-1}
1
A
2
3
4
$e^{\sqrt{2}}$