MATHÉMATIQUES

DEVOIR DE CONTRÔLE # 1

$4^{\text{éme}}$ MATHS — DURÉE : 2H

Exercice 1 (3 points). Répondre par vrai ou Faux (Sans justification)

1/ $2-i$ est une racine cubique de $2-11i$

2/ Si f est une fonction croissante et majorée par 3 sur l'intervalle $[0,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

3/ (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes et (c_n) est une suite vérifiant $a_n < c_n < b_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite (c_n) est convergente.

Exercice 2 (5 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\sqrt{x} & si \quad x\geq 0 \\ 1+x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si \quad x<0 \end{cases}$$

1/ a— Montrer que pour tout réel $x<0$, on a : $\left|f(x)-1\right| \leq |x|$

b— Montrer que f est continue en 0

c— Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $]0,1[$.

2/ Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous, et telle que $g(0)=1$ et $0<g(-1)<\alpha$.

On considère la fonction h définie par $h(x)=(f\circ g)(x)$

a— Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b— Montrer que $h(-1)>0$.

c— Montrer que l'équation $h(x)=0$ possède une solution unique β dans l'intervalle $]-1,0[$

d— Montrer que $\alpha=g(\beta)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 (6 points). On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0=0 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ U_{n+1}=U_n+\cos U_n$$

1/ Montrer que la fonction $f : x\mapsto x+\cos x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ a— Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0\leq U_n\leq \dfrac{\pi}{2}$.

b— Montrer que (U_n) est croissante.

c— Montrer que (U_n) est convergente puis déterminer sa limite.

3/ a— Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos U_k = U_{n+1}$

b— Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \cos U_k$

4/ t étant un réel donné.

Developper $\left(\dfrac{e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}}{2}\right)^2$ puis déduire que $\cos^2(\frac{t}{2}) = \dfrac{\cos t + 1}{2}$

5/ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $V_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \cos^2(\dfrac{U_k}{2})$

a— Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{2(n+1)}$

b— Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nV_n$

Exercice 4 (6 points). On donne dans la figure (feuille annexe) que l'on complétera dans la suite de l'exercice :

- Un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et un point fixe A sur $\mathscr{C}$.
- Deux points M, B du cercle $\mathscr{C}$ tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ où θ est un réel donné de $\left]0, \pi\right[\setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et on rapport le plan à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1/ On note z et z_B les affixes respectives des points M et B.

a— Écrire z et z_B sous forme exponentielle puis vérifier que $z_B = iz$.

b— Soit C le point d'affixe $z_C = -z^2$. On note A' le symétrique de A par rapport à la droite (OM). Montrer que A' et C sont symétriques par rapport à O. Placer alors C.

2/ Soit H le point d'affixe : $z_H = 1 + iz - z^2$

a— Soit N le point d'affixe $z_N = 1 + iz$. Construire N puis déduire une construction de H.

b— Montrer que :

$$\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

.

3/ Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

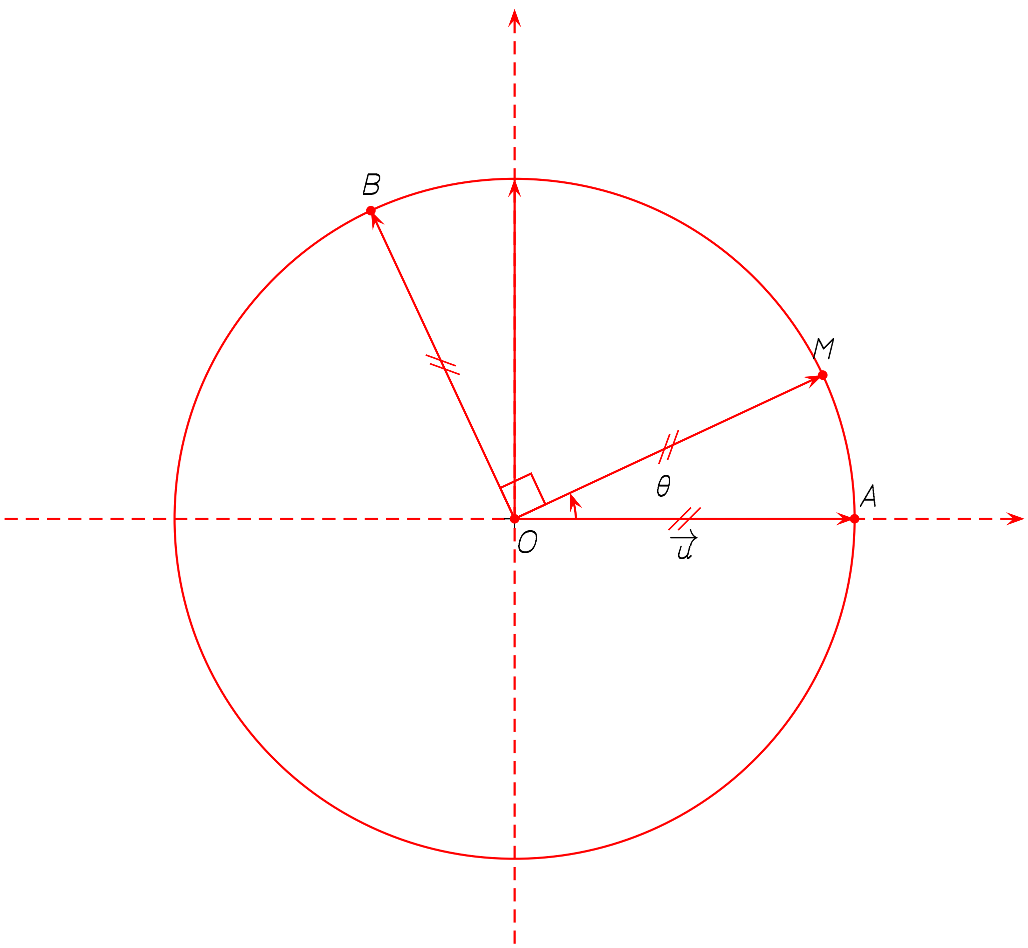
4/ a— Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - iZ - 1 = 0$. (On donnera les solutions sous forme exponentielle)

b— Déduire les valeurs de θ pour que H soit le centre de gravité du triangle ABC.

Nom : ....
Prénom :........................

FEUILLE ANNEXE

Á RENDRE AVEC LA COPIE



Exercice 5. Vrai ou faux.

1/ Vrai. $(2-i)^3 = 8 - 12i + 6i^2 - i^3 = 2 - 11i$

2/ Faux. La fonction $f : x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x+1}$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et elle est majorée par 3 sur cet intervalle mais $\lim\limits_{+\infty} f = 2$

3/ Vrai. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent et elles ont une même limite ℓ et par la suite (c_n) converge vers ℓ.

Exercice 6. **1/** a– Pour tout réel $x < 0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| &= \left|1 + x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 1\right| \\ &= |x|\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \end{aligned}$$

et $\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right| \leq 1$ donc $|f(x) - 1| \leq |x|$

b– On a $f(0) = 1$

- Continuité à droite en 0.

  $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1} - \sqrt{x}\right) = 1 = f(0).$
- Pour $x < 0$, on a : $|f(x) - 1| \leq |x|$ et $\lim\limits_{0^-} |x| = 0$ alors $\lim\limits_{0^-} |f(x) - 1| = 0$ donc $\lim\limits_{0^-} f = 1 = f(0)$
- $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^-} f = f(0)$ donc f est continue en 0

c– Nous avons :

- f est continue sur $[0,1]$ (somme de deux fonctions continues sur $[0,1]$)
- $f(0) = 1$ et $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ donc $f(0) \times f(1) < 0$.
- f est strictement décroissante sur $[0,1]$ comme étant la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0,1]$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $]0,1[$.

2/ a– Nous avons :

- g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$,
- f est continue sur $[0,+\infty[$,
- $g(\mathbb{R}) \subset [0,+\infty[$,

Donc $f \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b– Comme $g(-1) < \alpha$ et f est décroissante sur $[0,+\infty[$ alors $f(g(-1)) > f(\alpha)$ or $f(\alpha) = 0$ donc $h(-1) > 0$.

c– Nous avons :

- h est continue sur $]-1,0[$
- $h(0)=f(g(0))=f(1)=-\dfrac{1}{2}$ et $h(-1)<0$ alors $h(-1)\times h(0)<0$,
- h est strictement décroissante sur $[-1,0]$ (Car g est croissante sur $[-1,0]$ et f est décroisante sur $g([-1,0])$).

Alors l'équation $h(x)=0$ possède une solution unique β dans $]-1,0[$.

d– Nous avons : $h(\beta)=0 \Longrightarrow f(g(\beta))=0$,

Or $-1<\beta<0$ alors $g(-1)<g(\beta)<g(0)$ alors $0<g(\beta)<1$ donc $g(\beta)$ est une solution dans $]0,1[$ de l'équation $f(x)=0$ donc $g(\beta)=\alpha$.

Exercice 7. **1/** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=1-\sin x$

Pour tout réel x, $f'(x)\geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ a– On considère la proposition $P(n)$: $\quad 0\leq U_n\leq \dfrac{\pi}{2}$.

- **Initiation** $U_0=0$ alors $0\leq U_0\leq\dfrac{\pi}{2}$ alors $P(0)$ est vraie.
- **Héréditaire** : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que : $0\leq U_n\leq\dfrac{\pi}{2}$ comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $f(0)\leq f(U_n)\leq f(\dfrac{\pi}{2})$ alors $1\leq U_{n+1}\leq\dfrac{\pi}{2}$ donc $0\leq U_{n+1}\leq\dfrac{\pi}{2}$.
  Donc, $\qquad P(n)\Longrightarrow P(n+1)$
- **Conclusion** D'après le procédé de raisonnement par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b– Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1}-U_n=\cos U_n$ et comme $U_n\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos U_n\geq 0$ et par la suite $U_{n+1}-U_n\geq 0$ donc (U_n) est croissante.

c– (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente et elle converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $f(\ell)=\ell$ d où $\ell=\ell+\cos\ell$ alors $\cos\ell=0$ donc $\ell=\dfrac{\pi}{2}$

3/ a– (Somme télescopique) On a :

$$\begin{array}{rr}
 & U_{n+1}-U_n=\cos U_n\\
+ & U_n-U_{n-1}=\cos U_{n-1}\\
\vdots & \vdots\\
+ & U_2-U_1=\cos U_1\\
 & U_1-U_0=\cos U_0\\
\hline
\textit{Donc} & U_{n+1}-U_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos U_k
\end{array}$$

b–

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\cos U_k \;=\; \lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{\pi}{2}$$

4/ $$\cos^2\left(\tfrac{t}{2}\right)=\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}{2}\right)^2=\frac{e^{it}+e^{-it}+2}{4}=\frac{2\cos t+2}{4}=\frac{\cos t+1}{2}$$

5/ a− D'après **4/**, on a : $\cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right) = \frac{1+\cos U_k}{2}$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\cos U_k}{2}\right) = \frac{n+1}{2} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos U_k}{2} \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\cos U_k \text{ et par la suite ,}$$

$$V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$$

b− – $V_n = \frac{1}{2(n+1)} \times U_{n+1}$ alors $\lim V_n = 0 \times \frac{\pi}{2} = 0$

– $nV_n = \frac{n}{2(n+1)} \times U_{n+1}$ alors $\lim nV_n = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 8. **1/** a− – $OM = 1$ et $(\overrightarrow{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi]$ alors $z = e^{i\theta}$;

– $OB = 1$ et $(\overrightarrow{u}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \theta[2\pi]$ alors $z_B = e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

$$z_B = e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \Longrightarrow z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} \Longrightarrow z_B = ie^{i\theta} \Longrightarrow z_B = iz$$

b− A' et A sont symétriques par rapport à (OM) alors $OA' = OA = 1$ et $(\overrightarrow{u}, \widehat{\overrightarrow{OA'}}) \equiv 2\theta[2\pi]$ alors $z_{A'} = e^{i2\theta}$ d'où $z_{A'} = -z_C$ et par la suie A' et C sont symétriques par rapport à O.

2/ a− On a $z_N = 1 + iz$ alors $z_N = 1 + z_B$ alors N est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

$z_H = z_N + z_C$ équivaut à $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{ON}$ équivaut à H est l'image de C par la tranlation de vecteur $\overrightarrow{ON}$.

b−
$$\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{z_H - z_A}{z_B - z_C} = \frac{iz - z^2}{iz + z^2} = \frac{iz + (iz)^2}{iz - (iz)^2} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \frac{z_H - z_C}{z_A - z_B} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

3/ Il suffit de montrer que $\frac{1+iz}{1-iz}$ est imaginaire.

On a : $|z| = 1 \Longleftrightarrow z\overline{z} = 1$ d'où :

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1+\frac{i}{\overline{z}}}{1-\frac{i}{\overline{z}}} = \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{-i\overline{z}+1}{-i\overline{z}-1} = -\left(\frac{1-i\overline{z}}{1+i\overline{z}}\right) = -\left(\overline{\frac{1+iz}{1-iz}}\right)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ d'une part et les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{BA}$ d'autre part sont orthogonaux alors H est l'orthocentre du triangle ABC.

4/ a– On a : $\Delta = i^2 - 4\times(-1) = 3 = (\sqrt{3})^2$ soit $\delta = \sqrt{3}$ une racine carrée de Δ.

Les solutions sont : $Z_1 = \dfrac{i-\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $Z_2 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

b– H est l'orthocentre du triangle ABC. Pour que H soit le centre de gravité du triangle ABC il faut et il suffit que le triangle ABC soit équilatéral donc son orthocentre, son centre de gravité et son centre du son cercle circonscrit seront confondus donc $H = O$ et par la suite $z_H = 0$ donc $1 + iz - z^2 = 0$ donc :

$$z = Z_1 \text{ ou } z = Z_2 \text{ et par la suite } \theta \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$