DEVOIR DE SHYNTHESE

SECTION : ECONOMIE ET GESTION

EPREUVE : MATHEMATHIQUE **DUREE : 2 H** **COEFFICIENT : 2,5**

Exercice n ° 1 : *(03 points)*

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par « Vrai » ou par « Faux ».
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,5 point et une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La limite de $\left(x-e^{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$ est égal à $+\infty$
2) L'intégral $I=\int_{-1}^{4}\frac{-e^{2x}}{e^{x}+1}dx$ est un réel positif
3) Soit la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $f(x)=x-x\ln x$ alors $f'(x)=-\ln x$
4) $e^{2(1+\ln 2)}=4e^{2}$
5) Le produit $B\times A$ des ces deux matrice $A=\begin{pmatrix}0&3&0\\5&7&1\\0&6&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}$ n'est pas possible
6) La matrice $A=\begin{pmatrix}0&3&0\\5&7&1\\0&6&0\end{pmatrix}$ est inversible

Exercice n ° 2 : *(05 points)*

La matrice M ci – contre est associée à un graphe G de sommets A, B, C, D, E et F qui donne le plan d'un quartier avec le sens de circulation sur chaque arc.

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

1) Justifier que le graphe G est orienté
2) **a)** Recopier et compléter le tableau suivant

Sommet	A	B	C	D	E	F
d^{+}						
d^{-}						
$d^{+}-d^{-}$						

   b) Peut – on parcourir toutes les rues du quartier une fois et une seule?
   c) Le graphe G admet – il un cycle orienté eulérien ?
3) Représenter le graphe G puis donner un exemple de chaine orientée eulérienne
4) On donne la matrice M^{3}
   Donner toutes les chaines de longueur 3 reliant C à A

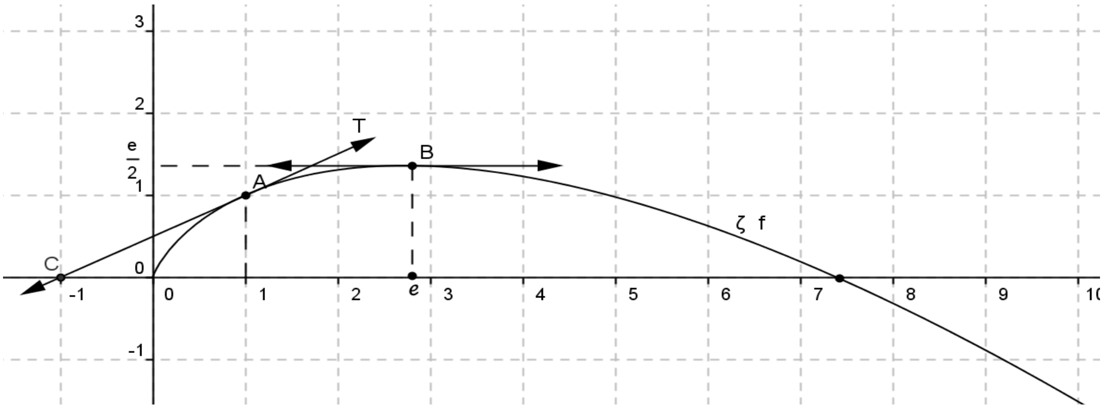
$$M^{3}=\begin{pmatrix}2&0&1&0&0&1\\0&2&0&1&1&0\\2&0&2&0&1&1\\1&2&0&2&0&1\\0&1&1&0&3&0\\1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

<u>Exercice n ° 3</u> : *(06 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé

Le graphique ci – dessous représente la courbe d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$

T est la tangente à ζ_f au point $A(1;1)$ et passe par le point $C(-1;0)$



1) Par lecture graphique :

a) Donner $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(e)$ justifier ce dernier résultat

b) Donner l'équation de la tangente T

c) Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$

2) Sachant que f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}(2-\ln x)$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

b) Interpréter graphiquement ce résultat

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

d) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$

3) **a)** Montrer par une intégration par partie, que $I=\int_1^e x\ln x dx=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

b) Calculer alors l'aire de la partie du plan limité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

(Utiliser cette expression de f : $f(x)=x-\frac{1}{2}x\ln x$)

<u>Exercice n ° 4</u> : *(06 points)*

Une maison d'édition a ouvert le premier janvier 2008, sur internet, un site de vente par correspondance

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2008	Janvier 2009	Juin 2009	Janvier 2010	Juin 2010
Rang du mois x_i	1	13	18	25	30
Nombre de livres (en milliers) y_i	1,5	2,5	3	5	6

1) **a)** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal (1 cm représente deux mois en abscisse et 1 cm représente 0,5 milliers en ordonnée)

   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r

2) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. Pour cela on pose $z_i = \ln(y_i)$

   Après l'avoir recopié, compléter le tableau où z_i est l'arrondi 10^{-3}

Rang du mois x_i	1	13	18	25	30
$z_i = \ln(y_i)$		0,916			

3) **a)** Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindres carrés

   b) Déduire alors que : $y = 1{,}36.e^{0{,}049x}$

4) En supposant que l'évolution se poursuivre de cette façon :

   a) A partir de quel mois peut – t –on prévoir que le nombre de livres vendus dépasse 10 milliers?

   b) Donner une estimation à l'unité près du nombre de livres qui seront vendus en janvier 2012

5) On admet que le nombre moyen m de livres vendus chaque mois entre janvier 2008 et juin 2010 est donné par la formule : $\dfrac{1}{30}\int_0^{30} 1{,}36.e^{0{,}049x}\,dx$

   Calculer m. (on donnera une valeur approchée à l'unité près)

CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

Exercice1

1)faux 2)faux 3)vrai 4)vrai 5)vrai 6)faux

EXERCICE2

1)la matrice n'est pas symetrique par rapport a la diagonale principale

Donc le graphe est orienté

2)a)

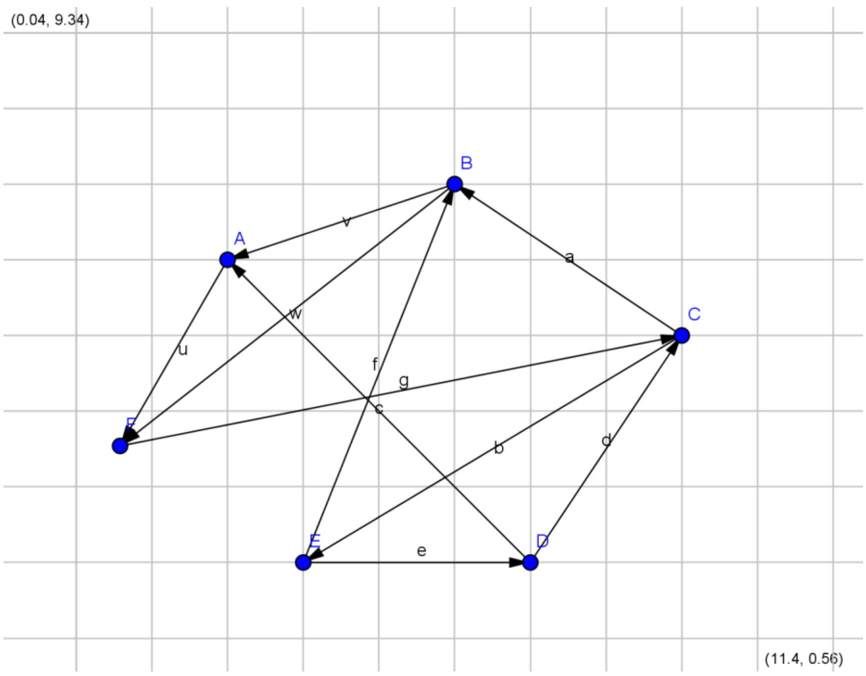
Sommet	A	B	C	D	E	F
d^+	1	2	2	3	2	1
d^-	2	2	2	1	2	2
$d^+ - d^-$	-1	0	0	2	0	-1

b)il n'existe pas un chemin Eulerien de U vers V sinon

$$\begin{cases} d^+(U) = d^-(U) + 1 \\ d^+(V) = d^-(V) - 1 \\ d^+(s_i) = d^-(s_j)\ pour\ s_i et\ s_j\ \neq U\ et\ V\ (sommets) \end{cases} \quad qui\ est\ le\ cas$$

c)$il\ n'existepas\ de\ cycle\ Eulerien\ car\ sinon\ d^+(s_i) = d^-(s_i)$

3)



A-E-D-C-B-F

4)$a_{31} = 2\ \ dans\ M^3\ donc\ il\ existe\ deux\ chaines\ de\ longueurs\ 3\ partant\ de\ C\ et\ arrivant$ à A

$qui\ sont\ C - E - B - A\ et\ C - E - D - A$

EXERCICE3

1)a)$f(1) = 1; f'(1) = \frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$; $pour\ f'(e) = 0\ (tangente\ horizontale)$

b)$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow T: y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c) f est croissante sur]0;e] et decroissante sur [e ;+∞[

2)$a)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\ ; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \Leftrightarrow$
$la\ courbe\ C\ admet\ une\ branche\ parabolique\ de\ direction\ celle\ de\ (O; \vec{j})\ \ (vers\ les\ ordonnes\ negatifs)$

b)$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$

c)

x	0		e		+∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)			e/2		
	0				-∞

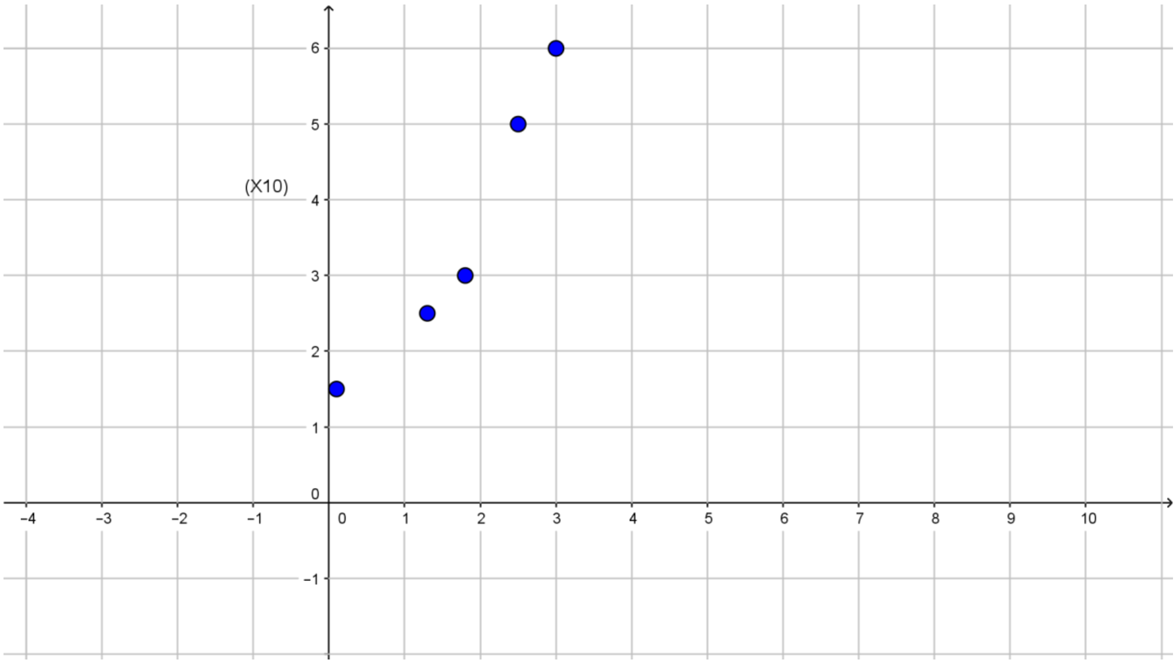
3)a)$I = \ ?\ \ on\ pose\ u' = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2}$; $v = lnx \Rightarrow v' = \frac{1}{x} \Rightarrow I = \left[\frac{x}{2}\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx =$

$\frac{e-1}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e^2+1}{4}$

b)A=$\frac{e^2-1}{2} - \frac{1}{2}I = \frac{4e^2-4-e^2-1}{8} = \frac{3e^2-5}{8}$

EXERCICE4

1)a)



$$b)r = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y};\ \bar{x} = \frac{1+13+18+25+30}{5} = 17{,}4\ ;\ \bar{y} = \frac{1{,}5+2{,}5+3+5+6}{5} = 3{,}6\ ;$$

$V(x) = \frac{1+13^2+18^2+25^2+30^2}{5} - 17{,}4^2 = 101{,}04\ ; \Rightarrow \sigma_x = 10{,}05\ ;$

$V(y) = \frac{1{,}5^2+2{,}5^2+3^2+25+36}{5} - 3{,}6^2 = 2{,}74 \Rightarrow \sigma_y = 1{,}66\ ;$

$cov(x;y) = \frac{1{,}5+13\times 2{,}5+18\times 3+25\times 5+30\times 6}{5} - 17{,}4 \times 3{,}6 = 15{,}96$

$\Rightarrow r = \frac{15{,}96}{10{,}05\times 1{,}66} = 0{,}96\ \ correlation\ positive\ forte$

2)

x_i	1	13	18	25	30
z_i	0 ,405	0,916	1,099	1,609	1,792

$\bar{z} = \frac{0{,}405+0{,}916+1{,}099+1{,}609+1{,}792}{5} = 1{,}164\ ;\ \ cov(x,z) = 4{,}96\ \ ;$

D :z/x :z=ax+b ; a=$\frac{cov(x,z)}{v(x)} = 0{,}049 \Rightarrow D: z = 0{,}049x + b \Rightarrow b = \bar{z} - 0{,}049\bar{x} = 1{,}164 - 0{,}049 \times$

$17{,}4 = 0{,}311 \Rightarrow z = 0{,}049x + 0{,}311$

b)$on\ a : 0{,}049x + 0{,}311 = lny \Leftrightarrow y = e^{0{,}311}e^{0{,}049x} = 1{,}365e^{0{,}049x}$

4)$a) y \geq 10 \Leftrightarrow e^{0{,}049x} \geq \frac{10}{1{,}36} \Leftrightarrow 0{,}049x \geq \ln(\frac{10}{1{,}36}) \Leftrightarrow 0{,}049x \geq 1{,}99 \Leftrightarrow x \geq 40(mois)$

b)$en\ 2012\ ; x = 32 \Rightarrow y = 1{,}36e^{0{,}049\times 32} = 6{,}5\ (miliers)$

5)$m = \frac{1}{30} \times 1{,}36 \times \frac{1}{0{,}049}(e^{0{,}049\times 30} - 1) = 3(miliers)$